

[Àmbits
de millora]

Competència matemàtica

La resolució de problemes
en el primer cicle de primària

PROPOSTES

rp



7 | 1. Els problemes matemàtics

Concepte de problema

Aspectes fonamentals a considerar

11 | 2. Tipus de problemes en primer cicle de Primària

Problemes aritmètics (additiu-subtractius)

De transformació o canvi

De combinació o composició de mesures

De comparació

D'igualació

Índex de dificultat dels problemes aritmètics

Problemes geomètrics

Problemes amb geoplans

Problemes amb puzles: tangrams, pentòminos i policubs

Problemes lògics i d'estratègia

Problemes de recompte sistemàtic

Problemes d'atzar i probabilitat

Problemes tipològics

63 | 3. Fases en la resolució d'un problema

Fase 1: Comprendre el problema

Comprensió de l'enunciat

- E1. Enunciats orals
- E2. Enunciats gràfics
- E3. Enunciats amb molt poc de text
- E4. Enunciats amb text
- E5. Enunciats amb text desordenat
- E6. Enunciats amb informació no útil
- E7. Enunciats incomplets
- E8. Enunciats amb diverses solucions
- E9. Enunciats oberts
- E10. Enunciats amb molt poques dades numèriques
- E11. Enunciats d'investigació

Anàlisi de l'enunciat

Fase 2: Elaborar un pla de resolució

Fase 3: Executar el pla

Fase 4: Comprovar el resultat

Estimació de la validesa del resultat

Exactitud del resultat obtingut

Desenrotllament de les fases per mitjà d'un exemple pràctic

83 | 4. Conclusions

85 | 5. Bibliografia

89 | 6. Pàgines web

1. Els problemes matemàtics

Concepte de problema

Prèviament distingirem entre exercicis, problemes i investigacions matemàtiques:

- *Exercicis*: en l'enunciat apareixen clarament les dades, la condició, les quantitats o els objectes que cal trobar, així com l'estratègia que s'ha de seguir a l'hora de resoldre'ls. Són activitats d'aplicació de continguts o algoritmes apresos o memoritzats.
- *Problemes*: l'enunciat ja no és tan explícit, l'estratègia de resolució ha de ser descoberta per la persona que vol resoldre'l. No se solucionen amb l'aplicació d'una regla.
- *Investigacions matemàtiques*: són activitats obertes on no es donen criteris per a abordar-les i deixen molta llibertat a qui les estudia, ja que inclús les incògnites a resoldre poden dependre de les interrogacions que sorgisquen al llarg del procés d'investigació.

Per tant, podem afirmar que:

Les notes característiques que diferencien els problemes matemàtics dels exercicis i de les investigacions se'ns donarien en funció de si realment *representen un desafiament i un propòsit a aconseguir; són accessibles per als qui s'enfronten al*

Un problema és una situació, quantitativa o d'una altra classe, a què un individu o grup s'enfronta, que requereix una solució, i per a la qual no s'albira un mitjà o camí aparent i obvi que conduísca a esta.

problema; tenen un interès i desperten curiositat i voluntat per a resoldre'ls al mateix temps que necessiten del coneixement d'algunes tècniques matemàtiques senzilles.

Com ens afirma M. Antònia Canals, professora emèrita de la Universitat de Girona, "els bons problemes plantegen situacions noves, pròximes a la realitat de l'alumne, i impliquen un repte que et fa pensar, imaginar... S'adeqüen al nivell evolutiu de l'alumne i poden admetre més d'una solució".

És important ressaltar que en la resolució de problemes: *no hi ha un procediment general o regla que els alumnes puguin aprendre i aplicar, que no es reduïx senzillament a un algoritme, que no es pot ensenyar pas a pas i que —seguint en termes de negació— no estan plantejats simplement per a fer càlculs, sinó més bé per a fer pensar.*

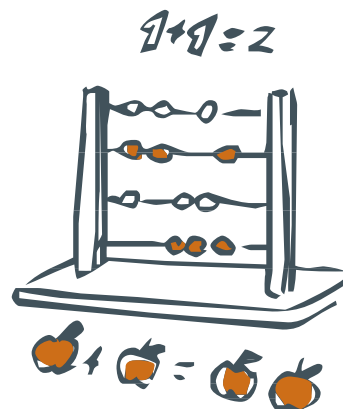
Per això, és molt important que els mestres disposem d'una bona selecció de problemes i que siguin de qualitat, que ens aprovisionem d'una gran varietat d'estos perquè, al mateix temps, ens permeten treballar tots els enfocaments possibles. També és requisit absolutament imprescindible, facilitar com a docents la creació d'un ambient de classe que incite els alumnes a explorar, arriscar-se, compartir experiències amb els seus companys, preguntar a uns i a altres (inclòs el seu mestre). En definitiva, fomentar una verdadera participació activa, responsable i creativa.

Aspectes fonamentals a considerar

En el cas de l'alumnat adscrit al primer cicle d'Educació Primària, hem de tindre en compte que s'ha de fer un treball previ d'introducció a la resolució de problemes.

Per això, en funció de les característiques mateixes de com evolucionen els alumnes quant a maduresa, procurarem incloure este treball:

- Plantejant situacions problemàtiques orals a través del joc, buscant la participació de tots els alumnes, basant-nos en materials concrets, com ara àbacs, interlínies, blocs lògics, policubs, etc.
- Presentant les situacions problemàtiques de manera significativa i variada.
- Plantejant problemes oberts ensenyarem els nostres alumnes que una mateixa situació es pot resoldre de diverses maneres.
- Treballant la resolució de problemes de totes les maneres possibles.
- Fomentant que els alumnes comenten els enunciats amb els companys.
- Ajudant i animant els alumnes que expressen el problema amb les seues paraules.
- Ensenyant els alumnes a ajudar-se de dibuixos i diagrames abans de resoldre el problema.
- Procurant que no totes les situacions problemàtiques es representen per escrit per a no produir rebuig per part de l'alumne.
- Incitant que siga l'alumnat qui invente i plantege situacions problemàtiques.



2. Tipus de problemes en el primer cicle de primària

Encara en l'actualitat, en moltes de les nostres escoles, és molt freqüent que als alumnes se'ls proposen problemes molt pareguts quant a contingut; a més d'enunciar-los de manera bastant repetitiva.

Sota esta perspectiva, el problema proposat esdevé un exercici la resolució del qual sempre implica el mateix procediment (generalment, inclús, una mateixa operació), circumstància per la qual l'alumnat no interioritza el procés de resolució, sinó que "aprén" un procediment viciat i relacionat amb la forma preposicional plantejada.

Com ens afirma novament la professora M. Antònia Canals i d'acord amb el pensament que s'ha expressat anteriorment: "l'error, d'entrada, és que molts alumnes, insegurs davant d'un problema, intenten endevinar quina és l'operació que han de realitzar, suma, resta, multiplicació... I són moltes vegades els mestres mateixos qui els porten a este error inicial d'actitud amb preguntes com: què has de fer, una suma o una resta? Este és el camí contrari al raonament."

Així, i amb massa freqüència, quan els suggerim que ens explique per què s'ha d'utilitzar o aplicar una o altra operació, sovint no saben què contestar-nos.

En moltes ocasions, quan a l'alumnat se li indaga la resolució d'un "problema nou", sense parar-se a reflexionar massa en la informació que li proporciona el text —a vegades, inclús, qüestiona en veu alta: mestre, mestra, este és de sumar o de restar?— l'alumne aplica el "procediment operatiu relacional après" per a donar una resposta quasi automàtica.

També és bastant habitual observar que quan l'alumnat "aprén" una determinada forma de presentació de les dades, davant d'una mateixa situació, diferent de la que s'ha après, no sàpia com actuar.

Per totes estes i moltes més raons, que els nostres companys/es docents també hauran observat i intentat corregir (a través del seu treball docent i experiència), és fonamental que el professorat explore totes les possibilitats —tant en situacions com en la presentació de dades— que ens permeten les diferents tipologies de problemes, especialment al cicle inicial, on encara el camp de les possibles operacions a realitzar és bastant limitat, però no així la capacitat de raonament, intuïció i deducció de l'alumnat que el configura.

Problemes aritmètics (additiu/subtractiu)

Englobem en este apartat tots els problemes en què apareixen dades numèriques i que poden resoldre's per mitjà d'una operació aritmètica: suma, resta, multiplicació i divisió.

És molt important que el docent siga conscient que, per a la resolució d'estos problemes, els alumnes han d'ajudar-se de material manipulatiu (fitxes de colors, àbacs, interlínies...) amb l'expressió oral. A continuació, passar a l'expressió escrita per mitjà de dibuixos, algorismes..., de manera que, encara que estos problemes puguin resoldre's per mitjà d'una operació aritmètica senzilla, és convenient i, per descomptat, necessari al principi quan l'edat dels alumnes és menor, que es resolguen sempre primer de manera manipulativa (fase del modelatge) i, posteriorment, formulen l'operació aritmètica amb la utilització l'algoritme corresponent.

D'esta manera treballarem el concepte de l'operació que es tracte i que sempre serà més comprensible per mitjà de la manipulació de materials que a través de l'algoritme estàndard de l'operació.

El pedagog català impulsor de l'escola activa, Alexandre Galí, transmetia la reflexió següent: "els problemes primer cal pensar-los, hem de demanar al xiquet que faça un treball mental, que ens explique què passa, què passarà, com creu que es resoldrà la situació..., abans de donar-li paper i llapis perquè faça operacions; en cas contrari, podríem caure en l'error de pensar que resoldre problemes és fer una operació o aplicar una fórmula adequada i ja està".

Posem un exemple:

Lluïsa té 5 caramels i Antoni, 3 caramels. Per a saber quants en tenen entre els dos, podem: (1) col·locar 5 palets a un costat i 3 palets a l'altre. Per a saber quants en tenim en total, *els ajuntem i els comptem*: 8 palets; (2) *fer la suma* $5+3=8$.

Sembla evident que la primera opció s'aproxima més a la realitat descrita en el problema, per això, la resolució és més comprensible per a l'alumne. De fet, la segona opció és una traducció a llenguatge matemàtic que pressuposa una reflexió prèvia (en abstracte) per a decidir quina operació s'ha de realitzar.

Per tant, esta segona opció comporta un nivell de dificultat molt més elevat que la primera. Serà un objectiu que haurem de treballar i aconseguir, que els nostres alumnes ho aconseguisquen també; però en cap cas pot ser el procediment inicial, especialment quan parlem d'alumnes dels primers nivells.

La resolució de problemes en el primer cicle de Primària

Per a treballar els conceptes de suma (addició) i de resta (sostracció) caldrà presentar situacions variades amb tots els verbs que impliquen o tinguen a veure amb esta idea.

Així, el concepte de suma té a veure amb els verbs: ajuntar, unir, afegir, guanyar, arreplegar, agafar...; i el de resta, amb els verbs: llevar, donar, repartir, perdre, tirar, etc.

El docent utilitzarà diferents recursos manipulables (àbacs, interlínies, blocs lògics, policubs...) per a treballar estos conceptes, de manera que els xiquets treballen la descomposició de tots els números d'una xifra de totes les maneres possibles. També treballarà el concepte de suma i resta amb este material manipulable.

En funció de l'operació o les operacions que s'hagen de calcular, classifiquem els problemes aritmètics en:

- Problemes additius/subtractius (aquells que es poden resoldre per mitjà de l'addició o la substracció).
- Problemes multiplicadors (aquells que es poden resoldre per mitjà de la multiplicació o la divisió).

Classifiquem els problemes aritmètics additius/subtractius (en funció de les dades i de la situació que es planteja en l'enunciat) en quatre tipologies: problemes de transformació o canvi, problemes de combinació o composició de mesures, problemes de comparació i problemes d'igualació.

Si considerem que estes orientacions van dirigides, de manera preferencial, al professorat del primer cicle d'Educació Primària i atés que tant la multiplicació com la divisió són continguts conceptuals i procedimentals de segon i tercer cicle, respectivament, incidirem de manera més sistemàtica en els ja mencionats problemes additius/subtractius.

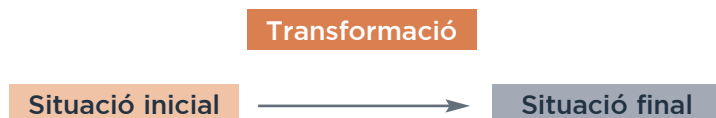
A continuació, passem a veure en detall cada una d'estes modalitats:

Problemes de transformació o canvi

En cicles superiors s'utilitza este tipus de problemes, en els quals la dificultat augmenta en presentar més d'una transformació en el mateix enunciat.

Este tipus de problema estaria definit per l'esquema següent, en el qual coneixeríem dos dades i hauríem d'esbrinar la tercera:

Són aquells en què es produïx una transformació d'una situació inicial a una situació final i "la incògnita del problema" pot ser qualsevol dels tres elements que hi intervenen: la situació inicial, la transformació o situació final.



Això comporta tres problemes distints amb índexs de dificultat diferents, segons calculàrem la situació final, la situació inicial o la transformació que s'ha produït.

Com la transformació pot ser creixent (amb augment) o decreixent (amb disminució), este tipus de problemes genera 6 models de problemes possibles, als quals anomenem T1 a T6, com s'indica en la taula adjunta:

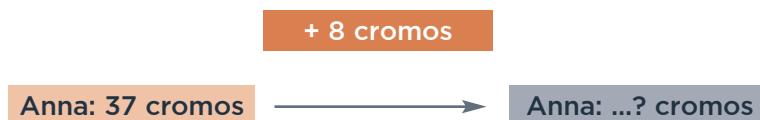
	Tipus de transformació	Situació inicial	Transformació	Situació final
T1	creixent	Coneguda	Coneguda	¿?
T2		Coneguda	¿?	Coneguda
T3		¿?	Coneguda	Coneguda
T4	decreixent	Coneguda	Coneguda	¿?
T5		Coneguda	¿?	Coneguda
T6		¿?	Coneguda	Coneguda



Vegem amb més detall estos models de problemes:

Tipus T1. Transformació creixent. Incògnita: situació final

Exemple: Anna té 37 cromos d'una col·lecció de naturalesa. Son pare li regala 8 cromos més. Quants cromos **té ara** Anna?

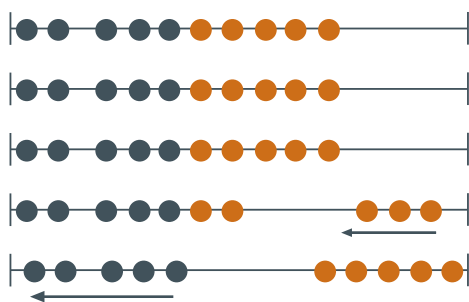


Este model de problema pot resoldre's bàsicament de tres maneres:

- Afegim els 8 cromos als 37 cromos inicials, de manera manipulativa, i utilitzem qualsevol recurs didàctic per a representar esta quantitat (boletes, llapis, gomes...) i comptem, inclús, cromos reals que tenim en el nostre "racó matemàtic".

$$37 + \underbrace{1+1+1+1+1+1+1+1}_{8} \longrightarrow 45$$

- O podem resoldre'l amb material manipulatiu, com és l'àbac, la qual cosa és molt didàctica, perquè obliga l'alumne a passar per la desena neta. Este aspecte és molt pràctic per al càlcul mental. La representació gràfica de la resolució seria la següent: a 37 cromos li n'afeg 8, però en primer lloc 3 per a obtindre'n 40 (desena neta) i, a continuació, 5, i obté 45 cromos.



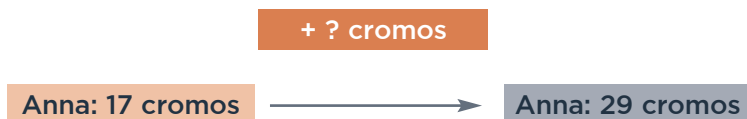
$$37 + 8 = 37 + 3 + 5 = 40 + 5$$

- O bé, als 37 cromos inicials, sumem els 8 cromos regalats per mitjà de l'ús del pensament matemàtic global que identifica la quantitat d'objectes desxifrats en l'intel·lecte amb l'expressió numèrica gràfica i simbòlica adequada:

$$37 + 8 = 45$$

Típus T2. Transformació creixent. Incògnita: transformació

Exemple: Anna té 17 cromos i son pare li regala diversos cromos nous pel seu aniversari. A l'ajuntar-los tots, Anna en té ara 29. Quants cromos li va regalar son pare?

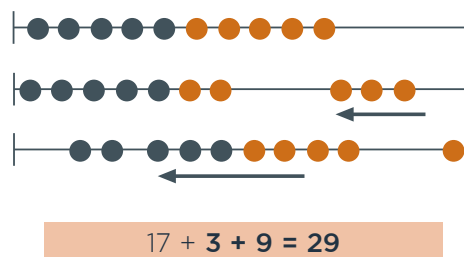


Este model de problema pot resoldre's bàsicament de sis maneres:

- Afegim cromos a 17, d'un en un, fins a arribar a 29, per mitjà del procediment manipulatiu, que ja hem exposat en el primer tipus de resolució de l'exemple anterior:

$$17 + \underbrace{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1}_{12} \longrightarrow 29$$

- Amb l'àbac: Tenim 17 cromos. Per a obtindre'n 29, haurem d'afegir-ne, en primer lloc, 3 (completar desena) per a obtindre'n 20 i, a continuació, 9. Així tindrem els 29 cromos. *En total hem afegit 12 cromos.*



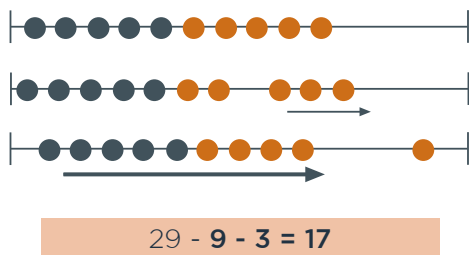
- Dels 29 cromos finals llevem d'un en un, manipulativament o comptant, fins a arribar-ne a 17 i, després, comptem quants cromos hem llevat:

$$29 - \underbrace{1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1}_{12} \longrightarrow 17$$

- Als 29 cromos finals, llevem d'un en un, manipulativament o comptant, els 17 cromos inicials i els que queden són els que hem afegit:

$$29 - \underbrace{1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1}_{17} \longrightarrow 12$$

- Si utilitzem l'àbac de nou, haurem de col·locar la quantitat total de 29 cromos i, a continuació, llevar-ne fins a quedar-nos amb els 17 cromos inicials. A continuació, llevem en primer lloc els 9 cromos de la tercera fila i, després, 3 cromos de la segona. *En total hem llevat 12 cromos.*

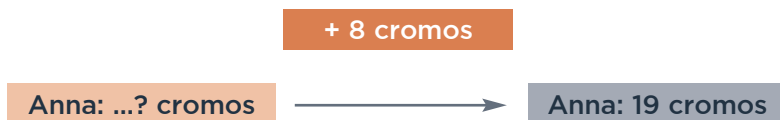


- Als 29 cromos finals restem els 17 cromos inicials:

$$29 - 17 = 12$$

Tipus T3. Transformació creixent. Incògnita: situació inicial

Exemple: A Anna son pare li ha comprat 8 cromos d'una col·lecció de naturalesa. Si ara té 19 cromos, quants cromos **tenia** Anna abans?



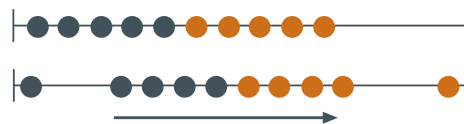
Este model de problema pot resoldre's bàsicament de tres maneres:

La resolució de problemes
en el primer cicle de Primària

- Separem o llevem, ja siga manipulativament o comptant, del total de 19 cromos els 8 cromos regalats i quedaran els cromos que Anna tenia abans del regal.

$$\begin{array}{r} 19 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \\ \hline 8 \end{array} \longrightarrow 11 \text{ cromos}$$

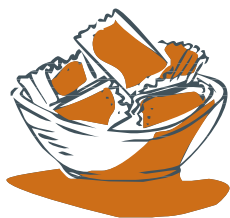
- Amb l'àbac: col·loquem els 19 cromos que té Anna i, a continuació, llevem els 8 cromos que li ha comprat son pare per a quedar-nos amb els cromos que tenia al principi.



$$19 - 8 = 11$$

- Als 19 cromos finals restem els 8 que li'n van regalar:

$$19 - 8 = 11$$



Tipus T4. Transformació decreixent. Incògnita: situació final

Exemple: Lluïsa tenia 26 galletes i li va donar 7 galletes a la seua amiga Rosa. A Lluïsa, quantes galletes li queden?

- 7 galletes

Lluïsa: 26 galletes



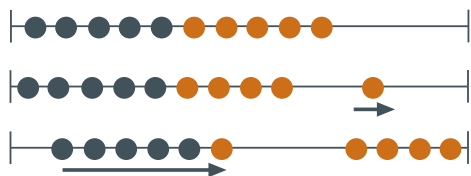
Lluïsa: ... galletes?

Este model de problema pot resoldre's bàsicament de tres maneres:

- Llevem les 7 galletes a les 26 inicials, ja siga manipulativa-ment o comptant:

$$\begin{array}{r} 26 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \longrightarrow 19 \\ \hline 7 \end{array}$$

- Amb l'àbac: col·loquem les 26 galletes i, a continuació, per a llevar-ne les que dona Lluïsa a la seua amiga Rosa, llevem primer 6 galletes (completar desena) i en queden 20; després tornem a llevar-ne 1, i quedaran les 19 galletes.



$$26 - 6 - 1 = 19$$

- A les **26** galletes inicials restem les **7** galletes regalades:

$$26 - 7 = 19$$

Tipus T5. Transformació decreixent. Incògnita: transformació

Exemple: Lluïsa tenia 26 galletes i en va donar unes quantes a la seua amiga Rosa. Si ara li queden 21 galletes, quantes galletes va donar a Rosa?



Este model de problema pot resoldre's bàsicament de tres maneres:

- A les 26 galletes inicials llevem galletes una a una, ja siga manipulativament o comptant, fins que queden 21 galletes, i després calculem les galletes que hem llevat:

$$26 - \underbrace{1 - 1 - 1 - 1 - 1}_{5} \rightarrow 21$$

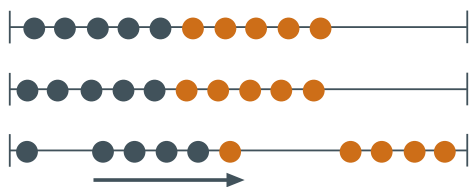
- A les 21 galletes finals afegim galletes una a una, ja siga manipulativament o comptant, fins a arribar a 26 galletes, després calculem les galletes, que hem afegit:

$$21 + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1}_{5} \rightarrow 26$$

- A les 26 galletes inicials llevem les 21 galletes finals i quedaran les galletes que va rebre Rosa:

$$26 - \underbrace{1 - 1 - 1 - \dots - 1 - 1}_{21} \rightarrow 5$$

- Amb l'àbac: haurem de col·locar les 26 galletes i llevar les galletes necessàries perquè ens en queden 21. La quantitat llevada, 5 galletes, seria la solució.



$$26 - 5 = 21$$

- A les 26 galletes inicials restem les 21 galletes inicials:

$$26 - 21 = 5$$

Tipus T6. Transformació decreixent. Incògnita: situació inicial

Exemple: Lluïsa tenia un paquet amb galletes i va donar-ne 7 a la seua amiga Rosa. Si en el paquet li han quedat 22 galletes, quantes en tenia al principi?

- 7 galletes

Lluïsa: ... galletes?



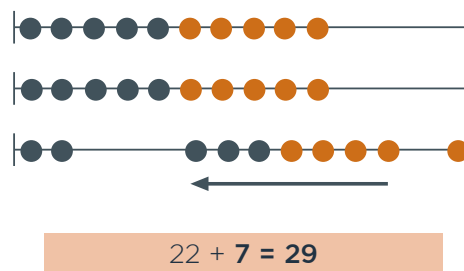
Lluïsa: 22 galletes

Este model de problema pot resoldre's bàsicament de tres maneres:

- A les 22 galletes finals n'afegim les 7 entregades a Rosa, ja siga manipulativament o comptant, i obtindrem les galletes inicials:

$$22 + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}_{7} \rightarrow 29$$

- Amb l'àbac seria: col·loquem les 22 galletes que a Lluïsa li han quedat i, a continuació, n'afegim les 7 que havia donat a Rosa i així obtindrem *les galletes que hi havia al principi, o siga, 29 galletes*.



- A les 22 galletes finals sumem les 7 galletes regalades:

$$22 + 7 = 29$$

Això implica l'existència, almenys, de 3 magnituds diferents, les dos inicials i una tercera que "engloba" semànticament les anteriors.

Problemes de combinació o de composició de mesures

En este tipus de problemes no intervé cap transformació que supose un canvi, sinó que "dos o més mesures es combinen per a obtenir'n una tercera".

En una situació típica de combinació: *en una classe hi ha 10 xiquets i 12 xiquetes, en total hi ha 22 alumnes*. Les dos primeres

quantitats es referixen a dos magnituds diferents (xiquets i xiquetes) i la tercera quantitat, a una magnitud (alumnes) que engloba les dos primeres.

Este tipus de problema estaria definit per l'esquema següent: en què **QP1** i **QP2** serien les quantitats parcials i **QG** la quantitat global.



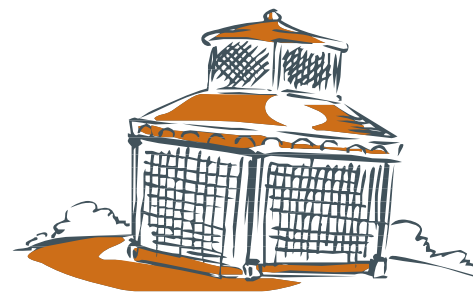
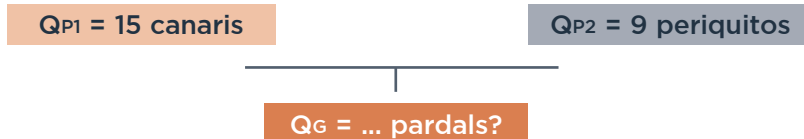
L'orde en què es presenten les quantitats parcials és irrellevant i no hi ha diferència entre que s'ignore la **QP1** o la **QP2**. Per això, només hi ha dos models de problemes de combinació, segons si la incògnita és una quantitat global o una quantitat parcial, com es pot observar en la taula següent:

Model	Quantitat parcial 1	Quantitat parcial 2	Quantitat global
C1	Coneguda	Coneguda	... ?
C2	Coneguda	... ?	Coneguda
	... ?	Coneguda	Coneguda

Vegem amb més detall estos models:

Tipus C1. La incògnita és la quantitat global

Exemple: *En el parc hi ha un gabial amb 15 canaris i 9 periquitos. Quants pardals hi ha en total en el gabial?*



Este tipus de problema pot resoldre's bàsicament de tres maneres:

- Representar, manipulativament o gràficament, els 15 canaris i els 9 periquitos. A continuació, els ajuntem tots i comptem quants pardals hi ha en total:

$$1 + \dots + 1 + 1 \longrightarrow 15 \text{ canaris} \quad 1 + \dots + 1 + \dots \longrightarrow 9 \text{ periquitos}$$

$$1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 \longrightarrow 24 \text{ pardals}$$

- A una de les quantitats parcials se li afig, de manera manipulativa, gràficament o comptant, l'altra quantitat parcial i s'obté la quantitat global:

$$15 \text{ canaris} + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1 + 1)}_{9 \text{ periquitos}} \longrightarrow 24 \text{ pardals}$$

- Se sumen les quantitats parcials i s'obté la quantitat global:

$$15 \text{ (canaris)} + 9 \text{ (periquitos)} = 24 \text{ (pardals)}$$

Tipus C2. La incògnita és una de les parts

Exemple: *En el parc municipal hi ha un gabial amb 22 pardals. Si 15 d'estos són canaris i la resta periquitos, quants periquitos hi ha en el gabial?*



Este tipus de problemes es resol bàsicament de dos maneres:

- A la quantitat parcial coneguda se li afigen elements un a un, de manera manipulativa o comptant, fins a arribar a la quantitat global. Només cal calcular el que hem afegit:

$$15 \text{ canaris} + \underbrace{1+1+\dots+1+1}_{7 \text{ periquitos}} \longrightarrow 22 \text{ pardals}$$

- A la quantitat global que es coneix es lleva, de manera manipulativa o comptant, la quantitat parcial i s'obtindrà l'altra quantitat parcial:

$$22 \text{ pardals} - \underbrace{1-1-1-\dots-1-1}_{15 \text{ canaris}} \longrightarrow 7 \text{ periquitos}$$

Problemes de comparació

Quan parlem d'este tipus de problemes, establim una comparació entre algunes de les quantitats que intervenen en el problema.

Este tipus de problemes està definit per l'esquema següent:



En funció de la grandària de Q_R i Q_C poden donar-se dos situacions:

- Si $Q_R < Q_C$, la comparació es denomina **creixent**

A una de les quantitats que es compara se la denomina "quantitat de referència" (Q_R) i a l'altra "quantitat comparada" (Q_C). La tercera quantitat que intervé és la "diferència" (D) que hi ha entre les quantitats comparades.

Exemple: *Lluís té 7 cromos (Q_R) i Manel té 12 cromos (Q_C).
Per tant, Manel té 5 cromos més (D) que Lluís.*

- Si $Q_R > Q_C$ la comparació es denomina **decreixent**

Exemple: *Lluís té 13 cromos (Q_R) i Manel té 9 cromos (Q_C).
Per tant, Manel té 4 cromos menys (D) que Lluís.*

D'altra banda, com la incògnita pot ser qualsevol de les tres quantitats anteriors, això ens condueix irremeiablement a considerar tres models de problema de comparació creixent i altres tres de comparació decreixent, és a dir, en total 6 models diferents, com s'indica en la taula de referència següent:

Models	Tipus de comparació	Quantitat de referència	Quantitat comparada	Diferència
Comp1	creixent	Coneguda	Coneguda	... ?
Comp2		Coneguda	... ?	Coneguda
Comp3		...?	Coneguda	Coneguda
Comp4	decreixent	Coneguda	Coneguda	... ?
Comp5		Coneguda	...?	Coneguda
Comp6		... ?	Coneguda	Coneguda

Vegem amb més detall estos models i els principals procediments de resolució:

Tipus Comp1. Comparació creixent. Incògnita: diferència

Exemple: *Joan té 12 anys i Anna té 5 anys. Quants anys té Joan més que Anna?*



Este tipus de problemes es resol bàsicament de quatre maneres:

- Representem, gràficament o per mitjà de materials manipulatius, els 12 anys de Joan, i davall fem el mateix amb els 5 anys d'Anna. Després comptem els anys de més que té Joan.

Q_C = Joan ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ → **7**

Q_R = Anna ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

- Als 5 anys d'Anna, afegim anys, de manera manipulativa o comptant un a un, fins a arribar als 12 de Joan. Després calcularem els anys afegits per a esbrinar la diferència.

5 anys + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 → 12 anys

7 anys

- Als 12 anys de Joan llevem anys, de manera manipulativa o un a un, fins a arribar als 5 d'Anna. Després calcularem els anys llevats per a poder esbrinar la diferència.

12 anys - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 → 5 anys

7 anys

- Als anys de Joan restem els anys d'Anna i esbrinem la diferència entre els dos.

12 - 5 = 7

Tipus Comp2. Comparació creixent. Incògnita: quantitat comparada

Exemple: Anna té 5 anys i Joan en té 7 més que Anna. Quants anys té Joan?

$$\begin{array}{ccc} & \text{D: } Q_C \text{ 7 anys} > Q_R & \\ Q_R \text{ 5 anys} & \longleftrightarrow & Q_C \text{ ... ? anys} \end{array}$$

Este tipus de problemes es resolen bàsicament de tres maneres:

- Als 5 anys d'Anna afegim, de manera manipulativa o comptant, els 7 anys de més que té Joan i després calculem el total:

$$\begin{array}{r} \text{Anna: 5 anys} \qquad \qquad \text{Diferència: 7 anys} \\ \star \star \star \star \star \qquad \qquad + \qquad \star \star \star \star \star \star \star \\ \hline \text{Joan: 12 anys} \end{array}$$

- Als 5 anys d'Anna afegim, un a un de manera manipulativa o comptant, els 7 anys de més que té Joan i després calculem el total:

$$\begin{array}{r} \text{5 anys} + \underline{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1} \longrightarrow \text{12 anys} \\ \text{Diferència} \end{array}$$

- Als anys d'Anna sumem els anys de més que té Joan i obtenim l'edat d'ell.

$$5 + 7 = 12$$

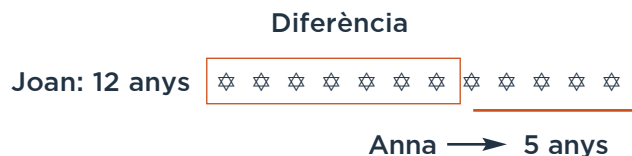
Tipus Comp3. Comparació creixent. Incògnita: quantitat de referència

Exemple: Joan, que ha complit 12 anys, té 7 anys més que Anna. Quants anys té Anna?

$$\begin{array}{ccc} & \text{D: } Q_C \text{ 7 anys} > Q_R & \\ Q_R \text{ ... ? anys} & \longleftrightarrow & Q_C \text{ 12 anys} \end{array}$$

Este tipus de problemes es resol bàsicament de tres maneres:

- Representem, gràficament o per mitjà de materials manipulatius, els 12 anys de Joan, separem els 7 anys de menys que té Anna i el que ens queda és l'edat d'Anna.



- Als 12 anys de Joan llevem, de manera manipulativa o comptant, els 7 anys de més que té Joan i després calculem el total:

$$12 \text{ anys} - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \longrightarrow 5 \text{ anys}$$

- Als anys de Joan restem els anys de més que té Joan i obtenim l'edat d'este.

$$12 - 7 = 5$$

Tipus Comp4. Comparació decreixent. Incògnita: diferència

Exemple: Joan té 13 anys i Anna en té 5. Quants anys té Anna menys que Joan?



Este tipus de problemes es resol bàsicament de quatre maneres:

- Representem, gràficament o per mitjà de materials manipulatius, els 13 anys de Joan i davall fem el mateix amb els 5 anys d'Anna. Després podem comptar els anys de menys que té Anna.



- Als 5 anys d'Anna afegim anys, de manera manipulativa o comptant un a un, fins a arribar als 12 de Joan. Després calcularem els anys afegits per a esbrinar la diferència.

$$5 \text{ anys} + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}_{8 \text{ anys}} \longrightarrow 13 \text{ anys}$$

- Als 13 anys de Joan llevem, de manera manipulativa o comptant un a un, fins a arribar als 5 d'Anna. Després calcularem els anys llevats per a esbrinar la diferència.

$$13 \text{ anys} - \underbrace{1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1}_{8 \text{ anys}} \longrightarrow 5 \text{ anys}$$

- Als anys de Joan restem els anys d'Anna i esbrinem la diferència entre els dos.

$$13 - 5 = 8$$

Tipus Comp5. Comparació decreixent. Incògnita: quantitat comparada

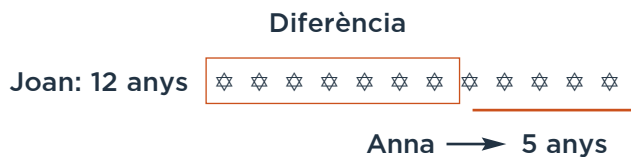
Exemple: Joan té 12 anys i Anna té 7 anys menys que Joan. Quants anys té Anna?

D: Qc 7 anys < QR

QR 12 anys \longleftrightarrow **Qc ... ? anys**

Este tipus de problemes es resol bàsicament de tres maneres:

- Representem, gràficament o per mitjà de materials manipulatius, els 12 anys de Joan, separem els 7 anys de menys que té Anna i el que ens queda és l'edat d'Anna.



- Als 12 anys de Joan llevem, manipulativament o comptant, els 7 anys de més que té Joan i després comptem el total:

$$12 \text{ anys} - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \longrightarrow 5 \text{ anys}$$

- o Als anys de Joan li restem els anys de més que té Joan i obtenim l'edat que té.

$$12 - 7 = 5$$

Problemes d'igualació

Els problemes d'igualació solen presentar-se com un tipus de problemes aritmètics diferents dels anteriors i així es recull en molta de la bibliografia que s'ha consultat.

Per la nostra part considerem que, en realitat, es tracta de problemes de comparació, com els models estudiats en l'apartat anterior, però això sí, amb xicotetes diferències a l'hora de formular l'enunciat.

Ho veurem més clar amb uns exemples: *Àngel té 8 boletes i Paula 5. Quantes boletes té Àngel més que Paula?* (problema de comparació). *Àngel té 8 boletes i Paula, 5 boletes. Quantes boletes necessita Paula per a tindre les mateixes que Àngel?* (problema d'igualació).

En els dos casos la situació és la mateixa: hi ha una comparació entre dos quantitats diferents i les preguntes respectives (quantes en té de més i quantes necessita per a tindre'n el mateix?) tenen idèntica resposta: la diferència entre les quantitats, és a dir, 3 boletes.

A pesar d'això, atès que la diferent manera de plantejar la pregunta pot afegir dificultat, hem decidit mantindre este tipus de problemes, que podrien presentar-se de sis maneres distintes, segons es pot observar en la taula següent, i que són semblants a la dels models de problemes de comparació.

La igualació pot ser creixent o decreixent, segons si s'ha d'afegir o llevar a la quantitat de referència per a igualar la quantitat comparada.

Així doncs, sense ànim de ser reiteratius i com a conclusió, podem afirmar que en este tipus de problemes una de les

Quan s'analitza un problema de comparació i un altre d'igualació, comprovem que la situació que plantegen és exactament la mateixa i la solució és la mateixa. La diferència més significativa consisteix en la "manera" en què s'expressa la pregunta.

quantitats (**Q. referència**) s'ha de modificar —augmentant o disminuint— per a igualar-se amb l'altra quantitat (**Q. comparada**). D'esta manera es combinarien un problema de canvi i un altre de comparació.

	Tipus d'igualació	Quantitat de referència	Quantitat comparada	Diferència
I. 1	creixent	Coneguda	Coneguda	?
I. 2		Coneguda	?	Coneguda
I. 3		?	Coneguda	Coneguda
I. 4	decreixent	Coneguda	Coneguda	?
I. 5		Coneguda	?	Coneguda
I. 6		?	Coneguda	Coneguda

A continuació, incloem un exemple de cada tipus de problema d'igualació i proposem al lector que seguisca les pautes de resolució indicades en els problemes de comparació i intente aplicar-les a estos models, la qual cosa li servirà com a exercici pràctic i li permetrà comprovar per si mateix l'encert o l'error de la nostra tesi.

Tipus I1. Igualació creixent. Incògnita: diferència

Exemple: Àngel té 8 boletes i Paula, 5. Quantes boletes necessita Paula per a tindre les mateixes que Àngel?

Tipus I2. Igualació creixent. Incògnita: quantitat comparada

Exemple: Àngel té 8 boletes. Si a Paula li donaren 3 boletes, aleshores tindria les mateixes boletes que Àngel. Quantes en té Paula?



Tipus 13. Igualació creixent. Incògnita: quantitat de referència

Exemple: Àngel té en la seua bossa boletes i Paula té en la seua 5. Si a Paula el seu iaio li regala 3 boletes, tindria les mateixes que Àngel. Quantes en té Àngel?



Tipus 14. Igualació decreixent. Incògnita: diferència

Exemple: Júlia té 12 còmics de Mortadel·lo i Filemó i Raül 17 còmics. Quants còmics hauria de regalar Raül al seu germà per a tindre els mateixos que Júlia?

Tipus 15. Igualació decreixent. Incògnita: quantitat comparada

Exemple: Remigi té 12 còmics de Mortadel·lo i Filemó. Si Raül regalara al seu germà 5 còmics de Mortadel·lo i Filemó, tindria els mateixos que Remigi. Quants còmics té Raül?

Tipus 16. Igualació decreixent. Incògnita: quantitat de referència

Exemple: Júlia té còmics de Mortadel·lo i Filemó en la seua habitació i Raül té 17 còmics de la mateixa col·lecció en la d'ell. Si Raül donara 5 còmics al seu germà, tindria els mateixos còmics que Júlia. Quants còmics té Júlia?

Índex de dificultat dels problemes additius/subtractius

El quadro següent fa referència als nivells de dificultat referits als percentatges d'èxit a l'hora de resoldre els diferents tipus de problemes additius d'una sola etapa.



**La resolució de problemes
en el primer cicle de Primària**

Tipus de problema	Incògnita	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3	Nivell 4
Transformació creixent	Quantitat final	X			
Transformació decreixent	Quantitat final	X			
Transformació creixent	Quantitat de transformació		X		
Transformació decreixent	Quantitat de transformació		X*		
Transformació creixent	Quantitat inicial			X	
Transformació decreixent	Quantitat inicial			X	
Combinació	Tot	X			
Combinació	Part			X	
Comparació creixent	Diferència			X*	
Comparació decreixent	Diferència			X*	
Comparació creixent	Quantitat comparada			X	
Comparació decreixent	Quantitat comparada			X	
Comparació creixent	Quantitat de referència				X*
Comparació decreixent	Quantitat de referència				X*

Problemes geomètrics

En este tipus de problemes es treballen fonamentalment conceptes geomètrics —topològics— per mitjà de la relació de formes, grandàries, posicions, etc.

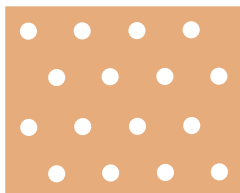
D'esta manera, si tenim en compte el nivell educatiu en què treballem (primer cicle d'Educació Primària), els possibles components aritmètics com ara aresta, vèrtex, angles... que hi apareguen, passarien a un segon pla. Això sí, la manipulació de materials concrets ha de ser el referent i l'eix fonamental metodològic utilitzat per a resoldre'l.

Problemes amb geoplans

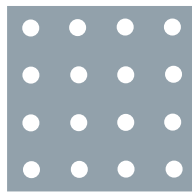
El geoplà permet la resolució de situacions problemàtiques a través de la manipulació, la qual cosa ajuda l'alumne a enfrontar-se amb proximitat i facilitat a estes situacions.

El geoplà va ser inventat pel matemàtic pedagog egipci Galeb Gattegno (1911-1988) per a ensenyar geometria a xiquets menuts. Consistix en una superfície plana en la qual es disposa, de manera regular, una sèrie de punts.

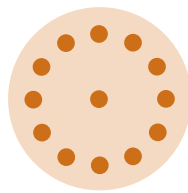
Depenent de com estiguen col·locats estos punts, es distingixen diversos tipus de geoplans, encara que els que més s'utilitzen són el geoplà triangular, el quadrat o quadrangular i el circular.



Triangular



Quadrangular



Circular

La resolució de problemes en el primer cicle de Primària

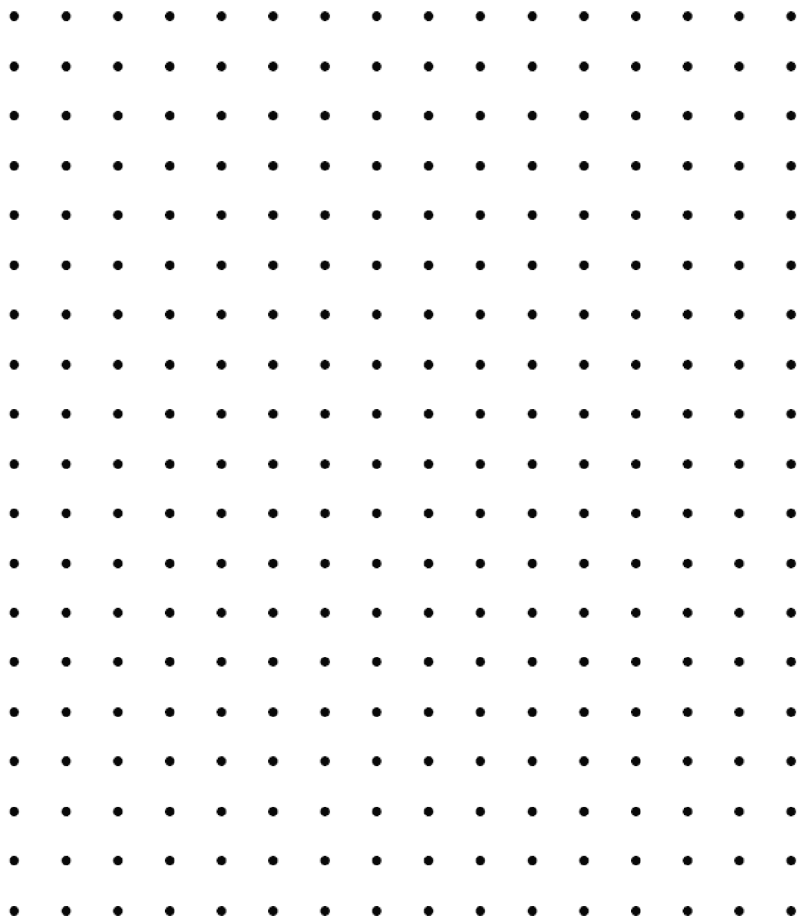
Totes les activitats proposades es faran sobre un geoplà quadrat (3x3, 4x4, 5x5...) i es podran suplir físicament amb una plantilla quadriculada, en la qual anotarem (amb dibuixos) els resultats de les activitats.

En l'actualitat disposem de "geoplans virtuals" en multitud de pàgines web referenciades, de manera que si arrosseguem amb el ratolí i/o amb un simple "clic", obtindrem el resultat que desitgem.

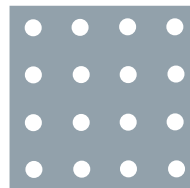
Plantilla Geoplà Quadrangular

Alumne/a:

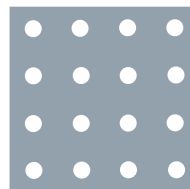
Activitat:



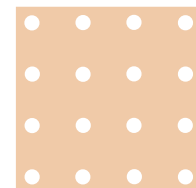
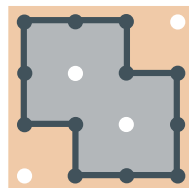
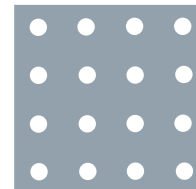
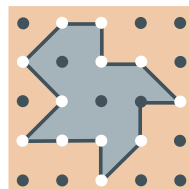
Exemple: Fes-ho en el geoplà i contesta, quants punts necessites per a formar un triangle? I un quadrat? I un rectangle?



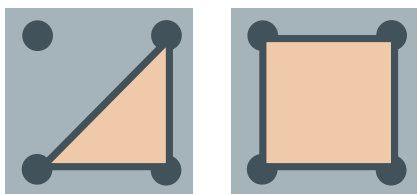
Exemple: En un geoplà 4x4, forma tots els quadrats que es puguin; escriu la solució i comenta-la amb els teus companys del grup.



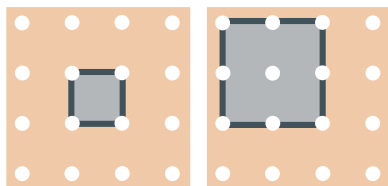
Exemple: Dibuixa en el teu geoplà una figura com la de la mostra.



Exemple: A continuació, et proposem la següent activitat que has de plasmar en la plantilla quadriculada: En un geoplà 2x2 (geoplà de 4 punts) es pot traçar un polígon de tres costats i un altre de quatre costats. De quants costats es poden traçar polígons en un geoplà 3x3 i 4x4?



Exemple: Quants quadrats pots fer en un geoplà 2x2, 3x3, 4x4 i 5x5? Calcula el costat i el perímetre de cada quadrat.



Problemes amb puzles: tangrams, pentòminos i policubs

Tangrams

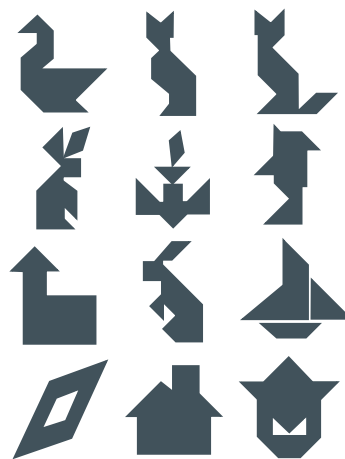
El més conegut és el Tangram xinès, en què el puzle està compost de 7 peces de diferents formes geomètriques (5 triangles, 1 quadrat i 1 romboide).

Quan les peces s'ajunten adequadament, formen un quadrat, com es pot veure en el dibuix situat al marge.

A partir d'estes peces i si ens adaptem a l'edat dels alumnes, podem proposar-los diferents tipus de problemes. Si bé, en



principi i amb l'objectiu que l'alumnat es familiaritze amb el mencionat recurs, hauríem de suggerir-los —com si d'un joc es tractara— la construcció de figures conegudes i "divertides" —exemplificades més avall—, al mateix temps d'altres que, a ben segur, seran capaços d'imaginar i construir.



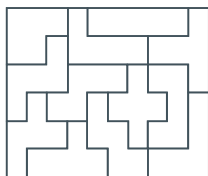
A continuació, caldrà proposar-los la construcció de figures més difícils, respectant sempre dos regles fonamentals: (1) Utilitzar la totalitat de les peces del tangram en cada una de les construccions i (2) no superposar cap de les peces.

Vegem uns exemples:



Pentòminos

Amb relació als pentòminos, hem d'assenyalar en primer lloc el significat que tenen. Quan parlem de pentòminos, ens referim a totes les figures possibles (en total 12) que es poden compondre amb cinc quadrats units entre si per un dels seus costats. Generalment estan fabricats amb PVC per a poder manipular-los i manejar-los amb facilitat.

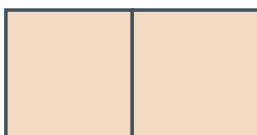


Este material està aconsellat per a construir o consolidar el coneixement matemàtic sobre el principi de conservació de quantitat i no de forma.

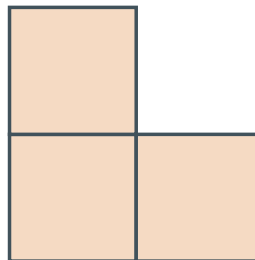
És a dir, per a utilitzar diferents unitats de superfície i trobar figures amb idèntica superfície i diferent forma o de la mateixa forma i superfície ("el doble", "la mitat", etc.), i també per a construir figures amb la mateixa superfície i observar la del perímetre màxim.

Prèviament haurem d'explicar als nostres alumnes el significat d'eixos conceptes (com s'indica a continuació), que facilitaran el reconeixement i la comprensió posterior d'estos.

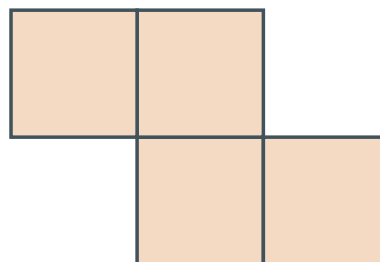
Dos quadrats units per un costats formen un dòmino.



Tres quadrats formen un trímimo.



Quatre quadrats, tetròmino.

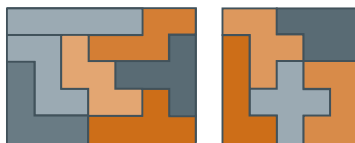


Vegem, a manera d'exemple, el plantejament d'una situació senzilla, però problemàtica: *Intenta buscar els dotze pentòminos que hi ha. Contruïx-los amb cartolina. Quants d'estos pentòminos formarien una caixa sense tapa?*

La tasca proposada pretén la busca sistemàtica dels dotze pentòminos:



Per a això, cal utilitzar alguna estratègia heurística, com partir dels tetròminos i afegir quadrats a cada cara, per a descartar aquells que es repetixen. A partir d'ací es pot demanar a l'alumne que constrüisca quadrats o rectangles amb les diferents peces.



El rectangle de 6x10 resultarà el més interessant d'obtindre, ja que hi ha 2.339 solucions possibles.



Policubs

Un policub és una agregació de cubs idèntics, de manera que cada cub té, com a mínim, una cara en comú amb un altre cub. Els cubs són interessants generadors de figures espacials.

Després d'un primer contacte, la tasca proposada pretén que els alumnes treballen la composició i la descomposició del 10 en dos sumands, com una tasca que col·labora amb l'automatització del càlcul mental. Per a fer-ho, cal demanar-los orde en la identificació de les solucions per a determinar-les totes sense repeticions. Es tracta de conduir la tasca cap a la completa sistematització.

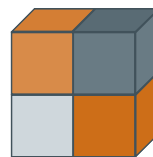
El colorit i la versatilitat d'este material el fa especialment atractiu per als xiquets que, de manera immediata, constrüeixen figures al seu desig.

Com a activitat prèvia i suggeridora podem demanar-los que utilitzin peces de dos colors per a construir un tren de longitud 10. De quantes maneres distintes pot fer-se? Ara utilitza glaçons de tres colors. Quines combinacions distintes pots fer per a aconseguir trens de longitud 10?

Vegem el plantejament d'alguna de les possibles tasques problemàtiques que es poden suggerir a l'alumnat.

Utilitza els cubs per a resoldre estos problemes.

Exemple: *Estructures de quatre. Agafa quatre cubs i construïx esta estructura. Ara agafa'n quatre més i fes una estructura diferent. Quantes estructures distintes es poden fer amb quatre cubs?*



Exemple: *Construir escales. Utilitza els cubs per a construir estes escales.*



Anota ací quants cubs t'han fet falta.

Nombre d'escalons	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de cubs	1	3						

Exemple: *Escalles dobles. Utilitza ara els cubs per a construir estes escales.*



Anota ací quants cubs t'han fet falta.

Nombre d'escalons	1	2	3	4	5	6
Nombre de cubs	1	4				

Es pretén treballar amb els conceptes de rotació, simetria, similitud i diferència des del punt de vista geomètric, de conservació del volum, i de les progressions. Cal animar els xiquets a crear la major quantitat possible d'estructures i que després les classifiquen segons la forma. El mestre ha de discutir la relació entre el nombre d'escalons i el nombre de cubs. Són capaços de deduir quants cubs seran necessaris en cada escala abans de construir-la?

La resolució de problemes en el primer cicle de Primària

Este tipus de problemes ajuda l'alumnat a desenrotllar la lògica i l'estratègia, aspectes d'importància significativa per a enfrontar-se a multitud de situacions en la vida real, que en general no es treballen des de l'inici de l'escolarització. No obstant això, són molt valorats posteriorment.

Problemes lògics i d'estratègia

Vegem algunes propostes (amb tasques i situacions problemàtiques concretes) de la gran varietat i diversitat d'exemples que podem trobar.

Exemple de joc d'estratègia: *Agafem fitxes. Col·loquem-ne deu en la taula. Juguen dos jugadors i cada un pot agafar una o dos fitxes quan li toque a ell. El jugador que agafe l'última fitxa perd la partida.*



Busqueu la forma d'actuar per a guanyar sempre la partida

Un nou exemple, el joc del 31: *Juguen per torns dos jugadors. El primer diu un número de l'1 al 5. El segon, al número del primer jugador, li'n suma un altre de l'1 al 5 i diu el resultat. Així juguen alternativament. Guanya el primer que diga 31.*

Després de jugar diverses partides, que comença un jugador cada vegada, cal esbrinar si algun d'ells té avantatge.

Indiqueu la manera de jugar, o l'estratègia, si en té, per a guanyar sempre.

$$\begin{array}{r} 2 + 4 = 6 \\ _ + 3 = 9 \\ 9 + _ \\ _ _ \\ _ _ = 31 \end{array}$$

Dins d'estos problemes lògics i d'estratègia, també podem considerar els *quadrats màgics*.

Vegem-ne un primer exemple senzill: col·loca en un quadre de 3×3 els números de l'1 al 9, de manera que totes les línies (horitzontals, verticals i diagonals) sumen 15.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

El quadrat més antic que es coneix és el que s'expressa com a solució a la qüestió plantejada amb anterioritat i que, segons es diu, va ser inventat per un matemàtic hindú 1.000 anys abans de Jesucrist.

Completa les dades que falten en este quadrat amb dades numèriques perquè siga un quadrat màgic (les files, les columnes i les diagonals han de sumar el mateix).

7		4
	8	
12		

Vegem si eres capaç de completar també els quadrats màgics que et presentem a continuació, que també sumaran 15. Ànim, segur que ho aconseguixes.

Quadrats màgics són aquells que, en sumar el valor en horitzontal, vertical o diagonal, obtenim sempre un resultat numèric coincident.



La resolució de problemes en el primer cicle de Primària

6		2
1		9
8	3	

2	9	
7		3
	1	8

L'objectiu és omplir una quadrícula de 4x4, dividida en subquadrícules de 2x2, on has de posar les xifres de l'1 al 4 sense repetir-ne cap en una mateixa fila, columna o subquadrícula.

Incloem també els *sudokus* dins d'esta tipologia. Saps què és un *sudoku*? És un trencaclosques matemàtic de col·locació que es va popularitzar al Japó en 1986 i es va donar a conèixer en l'àmbit internacional en 2005.

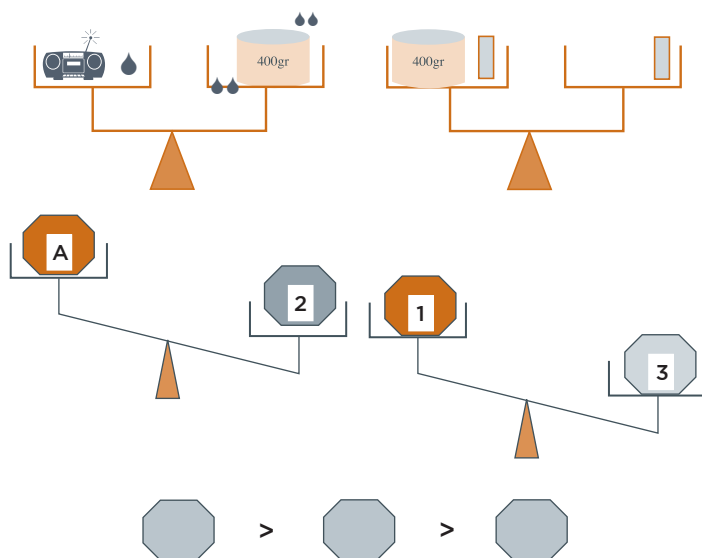
		4	
4	1	3	2
		2	3
	3		

		4	
2		3	2
		2	3
	2		

El joc original consta d'una quadrícula de 9x9 cel·les, dividida en subquadrícules de 3x3 amb les xifres de l'1 al 9 que partixen d'alguns números ja disposats en algunes de les cel·les. No s'ha de repetir cap xifra en una mateixa fila, columna o subquadrícula.

Exemple de balances: hem de representar balances en què apareixen diferents objectes, alguns d'ells amb el pes marcat. L'alumnat ha de deduir el pes d'algun objecte que figure en la balança.

Vegem un cas concret: fixa't bé en els objectes que hi ha en aquestes dues balances i intenta esbrinar quant pesa el radiocasset. Després, ordena els objectes segons el pes.



Els *enigmes* són exercicis que fan treballar la ment i desenrotllen el pensament lògic, així com el mètode de treball per a resoldre'ls, que passa pels tres estadis bàsics en este cicle: la manipulació, la comunicació oral i la representació escrita.

És molt important que els alumnes "discutisquen" les resolucions amb els companys, per parelles o en xicotets grups, per a refermar els raonaments.

La resolució de problemes en el primer cicle de Primària

Les proposicions servixen per a estimular el raonament, la comprensió oral, l'argumentació i el debat en els alumnes.

Tres exploradors van per la selva, han de travessar un riu molt perillós, impossible de creuar nadant. En l'altra vora hi ha dos xiquets amb una canoa i els demanen ajuda. Els xiquets accepten, però els comenten que la canoa és molt fràgil i només admet en cada viatge el pes dels dos xiquets o el d'un adult. Intenta ajudar-los a resoldre esta situació.

Finalment, i dins d'este apartat, considerarem el treball amb proposicions

Vegem-ne un cas concret: *escriu al costat de cada frase si és verdader (V) o fals (F) el que ens diu.*

- Si plou, els carrers estaran mullats
- Si estic en 2n de Primària, llavors tinc més de 5 anys
- Si sume dos números menors de 10, la suma és menor de 10
- Si el terra està mullat, llavors és que ha plogut
- Si tinc permís de conduir, llavors tinc cotxe
- Si a una quantitat li'n lleve una altra, el resultat serà menor que la primera quantitat
- Si tinc un número parell de cromos, llavors puc fer un número exacte de parelles
- Si mesure més de 2 metres, llavors jugue a bàsquet

Problemes de recompte sistemàtic

En este apartat entrarien aquelles situacions problemàtiques que tenen diverses solucions, i que per a obtindre-les cal fer recomptes.

Vegem-ne un exemple: *troba totes les maneres possibles de pagar 50 cèntims d'euro amb monedes de 10 i 20 cèntims.*

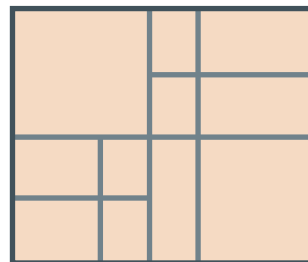
Per a resoldre este tipus de problema, l'alumne ha d'aprendre a executar dos passos fonamentals: (1) delimitar per a cada variable el nombre màxim d'idees i (2) elaborar una taula que permeti arregar totes les combinacions possibles de les variables que manegem.

Així, en l'exemple anterior, el nombre màxim de monedes de 10 cèntims que es poden usar és 5, ja que 6 o més donarien un resultat superior als 50 cèntims buscats. Per la mateixa raó, el nombre màxim de monedes de 20 cèntims és 2, ja que 3 donaria un resultat superior a 50 cèntims.

Una vegada delimitat el camp de possibles idees, sabem que només podem usar fins a 5 monedes de 10 cèntims i 2 de 20. Així no perdem el temps amb combinacions que ja sabem per endavant que no compliran les condicions de l'enunciat.

Concretat el primer pas, iniciarem l'elaboració de la taula amb la intenció expressa d'arregar les combinacions que ens suggereixen el nombre més gran d'idees trobades en el pas primer.

En el nostre exemple, hem de preveure totes les combinacions possibles de les monedes de 10 cèntims (0, 1, 2, 3, 4 i 5) amb les monedes de 20 cèntims (0, 1 i 2).



Amb este tipus de problemes el que intentem exercitar és la capacitat dels alumnes per a actuar de manera sistemàtica, ja que és l'única manera d'estar segur d'haver trobat totes les solucions.

**La resolució de problemes
en el primer cicle de Primària**

Ja només falta emparellar cada valor del primer grup amb tots els del segon i calcular els resultats.

Monedes de 10 c.	Monedes de 20 c.	Total
0	0	0 cèntims
0	1	20 cèntims
0	2	40 cèntims
1	0	10 cèntims
1	1	30 cèntims
1	2	50 cèntims
2	0	20 cèntims
2	1	40 cèntims
2	2	60 cèntims
3	0	30 cèntims
3	1	50 cèntims
3	2	70 cèntims
4	0	40 cèntims
4	1	60 cèntims
4	2	80 cèntims
5	0	50 cèntims
5	1	70 cèntims
5	2	90 cèntims

Problemes d'atzar i probabilitat

Tradicionalment es pensava que els conceptes que giren al voltant de la idea d'atzar i de probabilitat no estaven a l'abast dels xiquets abans d'arribar a l'etapa de les operacions formals. Esta idea s'ha superat en demostrar-se que, si bé els xiquets no són capaços de mesurar una probabilitat i assignar-la a un succés aleatori, sí que tenen capacitat per a distingir entre fenòmens aleatoris i deterministes, i també per a comprendre quan un succés té més facilitat d'ocórrer que un altre i, per tant, d'assumir la idea d'atzar.

Vegem alguns suggeriments a manera de proposta.

Exemple: *Plon chiribicu. Hi ha una cançoneta, usada per a fer sortejos, que s'anomena Plon chiribicu, i segons els xiquets i les xiquetes d'Alacant diu així: plon chiribicu chiribicà chiribicuri curifa chiribicuri curifero. Quants fills té el...?*

Un grup de xiquets inicien la cançó, l'entonen i associen cada expressió a un dels participants. En finalitzar-la, el xiquet o la xiqueta que coincidix amb l'última expressió diu (canta) un número de l'1 al 20 i torna a comptar fins que s'arriba a eixe número.

Exemple: *en una classe de primer han jugat 20 vegades i li ha tocat 15 vegades al mateix xiquet. Creus que han jugat bé? Per què creus que haurà sigut?*

Jugar a sortejar alguna cosa prou vegades per a veure si ocorre alguna cosa pareguda.

En esta activitat els alumnes s'adonen que si comencen sempre per una determinada persona, la cançó acaba sempre en la mateixa persona; per això, si esta repetix el número, el sorteig el

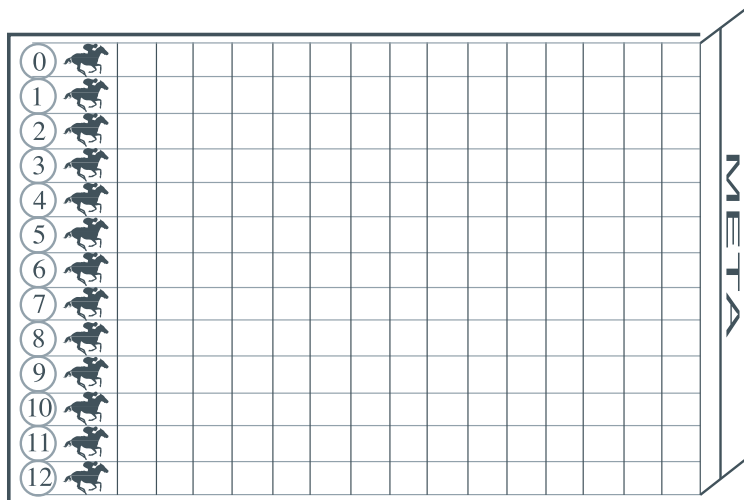
guanya la mateixa persona. L'aleatorietat es pot veure esbiaixada per esta actuació, però el mestre intentarà provocar este comportament.

Exemple: *la carrera de cavalls.*

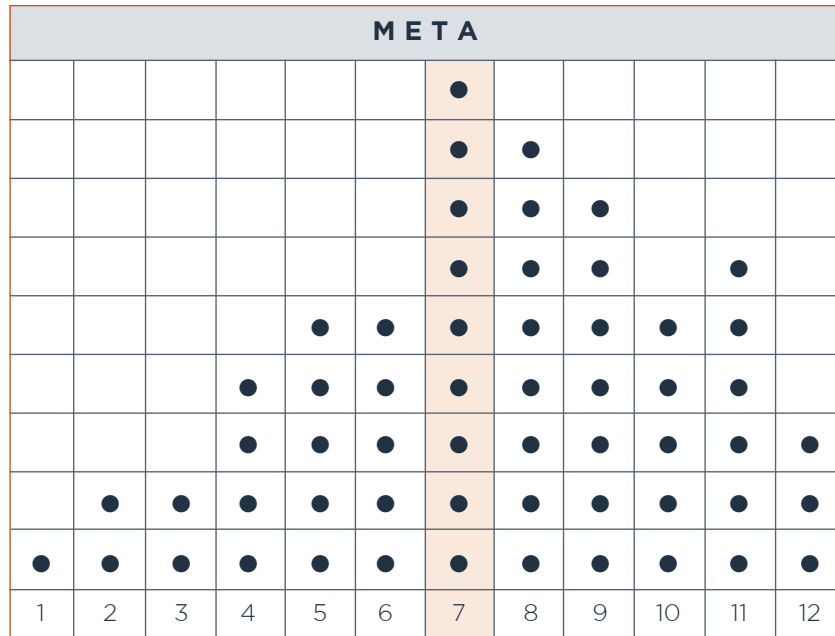
Es necessita un tauler (quadrícula amb els números de l'1 al 12 en la primera fila), dos daus de sis cares, numerats de l'u al sis, i fitxes de diversos colors. Pots jugar amb els teus amics, però amb la condició que a cada jugador li corresponga una fitxa d'un color diferent.

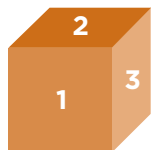
- a) Cada jugador col·loca la fitxa en l'eixida de qualsevol de les pistes. El millor és triar les pistes per torns, perquè cada jugador pugui jugar en totes les pistes al llarg de les distintes partides. Recorda que, en l'eixida de cada pista, només ha d'haver una fitxa. Ara, podeu començar a jugar. Llanceu el dau per torns i sumeu els dos números que isquen. Si el valor del número que resulta de la suma coincidix amb el de la teua pista, llavors mou-la una casella cap avant. Guanya qui primer creua la meta.
- b) Quan acabe la partida, discutix el resultat amb els amics. Creieu que és just el joc?
- c) Jugueu una altra vegada, però ara pensa amb atenció quina pista triaràs. Quan acabeu la segona partida, comenteu entre vosaltres tot allò que heu descobert.

Per a ajudar els xiquets en les deduccions es poden fer preguntes de l'estil: per què no s'ha mogut la fitxa de la pista 1? Quines són les millors pistes? On és preferible no col·locar les fitxes? Observes alguna forma especial en la posició final de les fitxes? Hi ha alguna pista que no s'ajuste a este esquema?



Ací es pretenen treballar les idees bàsiques de la probabilitat, l'èmfasi del conjunt de dos números i la importància de la grandària de la mostra.





Exemple: *daus estranys.*

En molts jocs s'utilitzen els daus per a fer sortejos. Sortejaem entre els quatre components del vostre equip un premi. Per a fer-ho, apegarem en cada cara d'un dau de fusta uns adhesius en què posarem els números de l'1 al 4. Com que el cub té sis cares, posarem el número 4 en tres de les cares, perquè no quede cap cara lliure.

Ara, cadascú tria un número. Llanceu el dau moltes vegades i compteu qui guanya cada vegada que es llança. Hi ha algú que guanya més vegades que la resta?

A continuació, construirem un altre dau diferent. Agafem dos cubs de fusta i els apeguem per una cara. Després els col·loquem un adhesiu en cada cara i tindrem un cub un poc allargat.

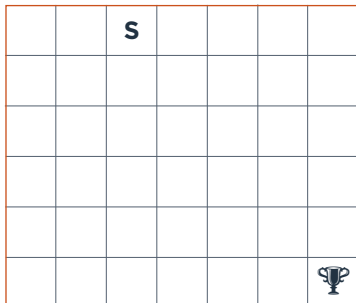


Problemes topològics

Són propostes per a refermar conceptes topològics com: dalt, baix, damunt, davall, dreta, esquerra, davant, darrere...

Exemple: *col·loca't en la casella d'eixida i fes el recorregut següent: dos caselles cap avall, una a l'esquerra, una cap avall, tres a la dreta i dos cap avall. Has aconseguit el trofeu? Escriu dos recorreguts distints que aconseguisquen el trofeu.*

Exemple: situa't en la quadrícula i, amb el punt de partida a la casella on es troba la bicicleta, escriu un recorregut amb almenys 4 moviments i indica cap a on es realitzen (dalt, baix, dreta, esquerra), fins a arribar al trofeu.



3. Fases en la resolució de problema

Si revisem l'abundant literatura sobre resolució de problemes trobem, en quasi tots els casos, que els autors coincidixen a descriure el procés de resolució d'un problema com una sèrie de passos, etapes o fases (com les denominarem nosaltres) que es presenten amb un orde que l'alumne ha de seguir per a assolir la meta desitjada, és a dir, la resolució del problema.

Estes coincidències desapareixen quan es tracta de fixar quantes són eixes fases i com denominar-les.

Per la nostra part, a pesar que considerem molt valuosa la proposta dels professors Luis Puig i Fernando Cerdán (1988) en el llibre *Problemas aritméticos escolares*, ens decantem per una proposta més simple, basada en els plantejaments de G. Polya (1987) en *Cómo plantear y resolver problemas*.

A continuació analitzarem cada una de les fases.

Fase 1: Comprendre el problema

El problema sol presentar-se a l'alumne per mitjà d'un text que rep el nom d'*enunciat*. L'enunciat sol estar format per una sèrie de frases, habitualment escrites, encara que en molts casos, i sobretot en els primers cursos, l'enunciat pot presentar-se de forma oral o inclús de forma gràfica.

Estes fases serien les següents: (1) comprendre el problema, (2) buscar estratègies de resolució, (3) aplicar l'estratègia triada i (4) comprovar la validesa de la solució trobada.

La comprensió del problema, és a dir, la comprensió de l'enunciat d'un problema, és bàsica per a resoldre'l. Això requereix un treball específic per a distingir i comprendre les dades que dona l'enunciat i la pregunta o preguntes que s'espera que contestem, siga quin siga el tipus de problema que es presente.

Comprensió de l'enunciat

La comprensió del problema significa, en primer lloc, la comprensió de l'enunciat i, per tant, està íntimament lligada a la capacitat de comprensió oral, escrita o gràfica de l'alumne.

Esta és una circumstància que el professor ha de tindre molt en compte i adequar el grau de dificultat formal de l'enunciat al nivell assolit en cada moment per l'alumne en el procés d'aprenentatge de lectura i escriptura.

Considerem que és fonamental que es treballen els diferents tipus d'enunciats i les múltiples variacions que cada un ofereix als docents. Amb això no sols potenciarem la comprensió dels enunciats, sinó que, a més, evitarem l'avorriments dels alumnes i la transformació dels problemes, com a conseqüència de la repetició dels enunciats, en simples exercicis amb resolucions que l'alumne memoritza i intenta aplicar, sense cap reflexió, a qualsevol problema que se li presente.

Amb l'ànim d'ajudar els docents en l'esforç de ser creatius en la formulació dels enunciats dels problemes i sense pretensió alguna d'exhaustivitat, indiquem algunes de les moltes variacions que pot adoptar l'enunciat d'un problema, per a posteriorment veure amb detall cada una de les variacions i algunes propostes per a treballar en l'aula.

E1. Enunciats orals

S'utilitzen les diferents situacions problemàtiques que es donen en la vida diària de l'escola, es plantejaran i es resoldran oralment a través de la intervenció del grup classe o bé, en primer lloc, per grups i, a continuació, amb la posada en comú.

Exemples de possibles situacions problemàtiques:

Exemple: Josep i Empar jugen en el pati amb boletes. Empar en té 7 i Josep, 4. Quantes boletes li falten a Josep per a tindre les mateixes que Empar?

Exemple: Toni ha de pintar 6 dibuixos en una fitxa. Si ja n'ha pintat 2, quants dibuixos li falten per pintar?



E.2. Enunciats gràfics

Com que els alumnes es troben en un període inicial d'aprenentatge en lectoescriptura i no la dominen, és convenient resoldre problemes presentats en forma gràfica, on l'alumne, a la vista d'un dibuix o fotografia, verbalitza una situació problemàtica o diverses i les resol.

Exemple de possibles respostes dels alumnes:

- Ma mare va comprar 6 ous i se li'n van trencar 2. Quants li'n queden per a fer el sopar?
- En obrir el frigorífic m'he trobat 4 ous sencers i 2 trencats. Quants n'hi havia en el frigorífic?
- ...



La resolució de problemes en el primer cicle de Primària



Exemples de possibles respostes dels alumnes:

- En una partida de birles vaig llançar la bola i vaig tirar a terra 4 birles. Si en total n'hi havia 12, quantes birles no van caure a terra?
- En una partida de birles el meu amic Josep va llançar la bola, va tirar 4 birles i en van quedar dretes 8. Quantes birles hi ha en la partida?
- ...



Víctor
10 años

Beatriz
4 años

Samuel
2 años

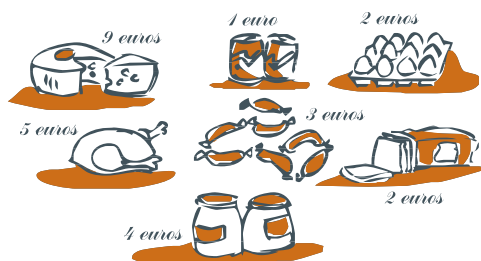
E3. Enunciats amb molt poc text

Els alumnes o el mestre, amb el suport del dibuix i la informació que se'ls dona, inventen situacions problemàtiques.

Exemples de possibles situacions problemàtiques:

- Quin xiquet és el major?
- Quin és el més xicotet?
- Quants anys tenen entre els tres xiquets?
- Si ajuntem els anys que tenen Beatriu i Samuel. Quants li'n falten per a tindre els de Víctor?

Exemple:



- Rosa va al supermercat a comprar amb sa mare: si compren 1 pollastre, 1 dotzena d'ous i 1 bossa de pa de motle. Quant s'han gastat?
- Si compràrem tots els productes que hi ha en el cartell, quant ens gastàriem?
- Quants productes podríem comprar amb 10 euros? Fes un llistat de totes les possibilitats.

E4. Enunciats amb text

Pel que fa als problemes de text, proposem distintes formes de treballar-los per a facilitar-ne la comprensió i la solució.

Treballar frases que signifiquen el mateix però expressades d'una altra manera.

Exemple:

- Pau és més baix que Isabel
- Isabel és _____
- Isabel té més anys que Pau
- Pau té _____
- Pau té més germans que Isabel
- Isabel té _____
- Pau és més gros que Isabel
- Isabel és _____

Comprendre la situació proposada

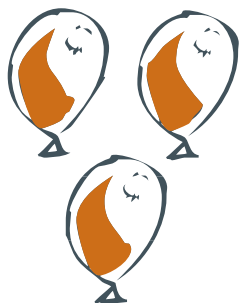
Exemple: *Joan és més baix que Pere, però més alt que Anna. Ordena'ls per alçada.*

Exemple: *Paula, Jordi i Marta van menjar aliments diferents en el desdjuní. Un va menjar magdalenes, un altre galletes i l'altre torrades. Paula no va menjar magdalenes ni torrades. Jordi no va menjar magdalenes. Què va desdjunar cada un?*

Identificar les dades i la pregunta

Una vegada plantejat oralment el problema o posteriorment llegit per part de l'alumne, se li demana que identifique les dades i la pregunta.

**La resolució de problemes
en el primer cicle de Primària**



Exemple: Josep té 19 globus rojos; Maria, 12 globus grocs.
Quants en tenen entre els dos?

Dades:

Quants globus té Josep? _____

Quants globus té Maria? _____ El que sabem

Què pregunta el problema? _____ El que ens pregunten

Identificar la informació necessària

Exemple: Rosa està mirant un catàleg de material escolar. Vol comprar un estoig, una regla i una agenda. Per a saber quant li costarà el que vol comprar, necessita (marca amb una X):

Les pàgines que té el catàleg

L'adreça de la papereria

El preu de la regla

El nom de l'amo de la papereria

El preu de l'agenda

La quantitat de diners que té en la vidriola

El preu de l'estoig

Traduir amb les seues paraules la situació problemàtica

Exemple: en el parc hi ha 48 coloms i 14 titots. Quants titots farien falta perquè hi haguera el mateix nombre de coloms?

Puix que..., hi ha 14 titots i vull que hi haja els mateixos que coloms, és a dir, 48. Quants titots falten?

Relacionar el concepte operacional amb el verb que expressa l'acció (d'una llista donada) necessària per a resoldre el problema

Exemple: *la mare de Rosa compra 12 metres de tela per a fer una disfressa i li'n sobren 3. Quants metres de tela ha utilitzat per a fer-li la disfressa?*

L'alumne llig l'enunciat i se li demana que trie entre les accions d'ajuntar, repartir i llevar la que creu que ha de fer per a resoldre'l.

Dramatitzar o representar la situació problemàtica per mitjà d'un dibuix o gràfic

Exemple: *Joan fa una col·lecció de cromos de cotxes de carreres. En té 16 i la col·lecció és de 30 cromos de cotxes. Quants li'n falten?*

Joan té Li'n falten



Exemple: *els alumnes de 2n de Primària del nostre col·legi se n'han anat d'excursió en un autobús de dos pisos. Si en el 2n pis anaven 29 alumnes i en el 1r anaven 14 alumnes més que en el segon, quants alumnes de 2n de Primària se'n van anar d'excursió?*

2n pis	29
1r pis	14 + 29
Total alumnes:	<hr/>



Substituir les dades oferides per altres de més senzilles, que li permeten simplificar el problema i resoldre'l més fàcilment

Exemple: *en un hivernacle hi ha 764 roses roges. Quan van a arreplegar-les es troben amb 149 roses marcides. Quantes roses quedaran en bon estat?*

Exemple: *en un hivernacle hi ha 5 roses roges. Quan van a arreplegar-les es troben amb 2 roses marcides. Quantes roses quedaran en bon estat?*

Inventar preguntes que tinguin sentit en relació amb un conjunt d'informacions donades per al problema

Exemple: *Paula complix 8 anys i en la festa d'aniversari hi ha 12 globus blancs, 15 de grocs i 9 de rojos. Quants globus hi ha en total? Quants globus hi ha més de grocs que de rojos? Si ajuntem els globus rojos i blancs, quants n'hi ha més que de grocs?*

Inventar problemes que tinguin les mateixes estructures que altres ja resolts

Exemple: *la mare d'Elisa té 35 anys i és 28 anys major que la seua filla. Quants anys té Elisa?*

El pare del meu amic Manel té 29 anys i és 21 anys major que el seu fill. Quants anys té Manel?

Triar l'expressió que resol el problema correctament entre les diverses donades

Exemple: *per a omplir una garrafa d'oli he tirat 9 litres en primer lloc i després 7. Quants en caben en la garrafa? Tria l'operació que ens dóna la resposta correcta i marca amb una creu el quadrat.*

9 - 7 litres

9 + 7 litres

Exemple: Francesc té 11 anys i sa mare 49. Quants anys li porta la mare a Francesc?

$$49 + 11 \quad \square$$

$$49 - 11 \quad \square$$

Davant d'una situació problemàtica de transformació, s'ha d'estimar si el resultat final augmenta o disminueix

Exemple: a casa d'Irene hi ha un fruiter amb 16 fruites. Si en el berenar amb les amigues es mengen 7 fruites, quantes en quedaran en el fruiter? Creieu que al final en el fruiter hi haurà més fruites o menys?



Exemple: Josep té 17 cromos i el seu germà li'n regala 5. Quants en tindrà ara Josep? Tindrà més o menys cromos al final?

Inventar problemes a partir d'esquemes de resolució donada la situació problemàtica

Exemple: escriu l'enunciat d'un problema que es resolga amb l'operació següent (presentades de distintes formes):

$16 + 8 =$	$\begin{array}{r} 16 \\ + 8 \\ \hline \end{array}$
<p>S.I.</p>	<p>S.I.</p>



Buscar possibles problemes a partir de la solució

La resposta és: 18 anys

Maria té 8 anys més que el seu germà David. Si este té 10 anys, quants anys té Maria?

Marta, Lluís i Rosa tenen 6 anys cada un, quants anys tenen entre els tres?

E5. Enunciats amb el text desordenat

Ordenar un problema que es presenta desordenat perquè tinga sentit i pugui resoldre's.

Exemple: [Quantes tomaques queden en la caixa?] [24 tomaques,] [en llancem 6 perquè s'han podrit] [Una caixa té]

Exemple-Resposta: una caixa té 24 tomaques, en llancem 6 perquè s'han podrit. Quantes tomaques queden en la caixa?

E6. Enunciats amb informació no útil

Saber com descobrir dades que no són útils per a la resolució del problema:

Exemple: en un tren que viatja a 90 km/h van 86 passatgers. Si baixen 32 passatgers, quants en queden al tren?

Exemple: un jugador de bàsquet de 2 metres d'alçada fa en la primera hora de l'entrenament 35 tirs a cistella i en la segona hora 41 tirs. Quants n'ha realitzat en les 2 hores d'entrenament?



E7. Enunciats incomplets

Els alumnes han de llegir atentament l'enunciat i analitzar-lo críticament, comentar què els sembla i si és possible obtenir una solució.

Exemple: *un edifici té 12 pisos i en cada pis hi ha 5 vivendes. Quantes persones hi viuen?*

Exemple: *en la festa d'aniversari d'Anna hi ha 6 companys i 7 companyes de classe. Quants anys complix Ana?*

Exemple: *en la pescateria un quilo de salmó costa hui 5 €, ahir en costava 6. Quant costarà demà?*

Exemple: *en un estany hi ha 14 ànecs i 8 cignes. Si se'n van 9 ànecs i alguns cignes, quants cignes queden?*

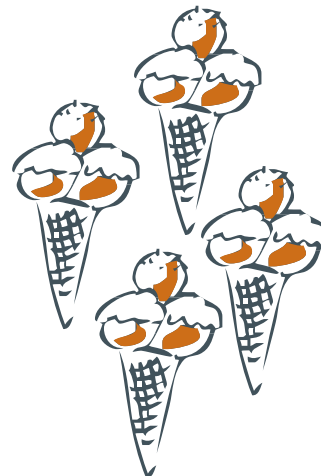
E8. Enunciats amb diverses solucions

L'alumne ha d'escriure totes les solucions que trobe per a resoldre el problema.

Exemple: *en una bossa de tela negra hi ha diverses boletes de color roig i diverses de color blau. Si hi fique la mà sense mirar i en trac dos boletes, de quants colors possibles eixiran les boletes?*

Exemple: *porte en la butxaca del pantaló diverses monedes de 2 euros, d'1 euro i de 50 cèntims. Si hi fique la mà sense mirar i en trac tres, quants diners puc traure?*

Exemple: *en la gelateria venen uns cucurutxos amb tres boles de gelat. Es poden triar 2 sabors: xocolata i maduixa; o també 3: xocolata, maduixa i vainilla. Quants cucurutxos distints es poden*



formar? Si la bola de xocolata costa 50 cèntims i la de maduixa 75, escriu al costat de cada gelat quant costa. Quants diners obtindrà la gelateria si ven tots els gelats que hem format?

E9. Enunciats oberts

Este tipus de problema permet a l'alumnat llibertat absoluta per a resoldre'l, ja que hi ha distintes maneres per a fer-ho. És ell qui ha de prendre les decisions que considere adequades.

A més, com que té diverses solucions, és assequible a tot l'alumnat i li permet així desenrotllar la seua iniciativa.

Exemple: si el perímetre d'una figura és 12, quina és la figura?

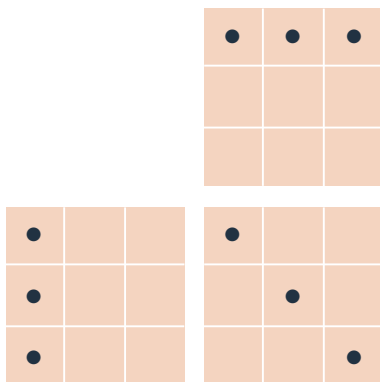
Exemple: tres pastissos de nata i tres pastissos de pasta fullada ens han costat 15 euros. Quant val cada un?

E10. Enunciats sense quasi dades numèriques

Exemple: tres amics volen disputar un ràpid torneig de tennis i han de jugar un partit entre cada un d'ells. Quants partits hauran de jugar? Si són 4 amics, quants partits jugarien?

E11. Enunciats d'investigació

Exemple: en un quadrat de 3x3 posa una fitxa en cada quadrícula i investiga quantes fitxes pots posar sense que n'hi haja tres en ratlla (que formen una línia). Esbrina el mateix amb un quadrat de 4x4.



Anàlisi de l'enunciat

És convenient que els alumnes s'acostumen a plantejar-se estes qüestions davant de qualsevol problema, a manera de protocol, i deixen constància escrita dels resultats de l'anàlisi detallada.

També és molt important el suport d'algun dibuix, esquema o gràfic per a representar l'enunciat, i d'esta manera identificar-ne més fàcilment les dades i comprendre millor el problema.

És inclús aconsellable que l'alumne, sobretot els més menuts, *dramatitze* o expresse amb les seues paraules l'enunciat o el comente amb algun company, ja que això l'obligarà a reflexionar sobre la situació i a entendre-la millor.

Fase 2: elaborar un pla de resolució

Una vegada identificades les dades, compresa la situació i aclarit què cal esbrinar, l'alumne ha de plantejar-se quines accions ha de realitzar. És a dir, ha d'elaborar un pla d'actuació, una estratègia que li permeta arribar des de les dades conegudes fins a la solució requerida.

I hem de deixar molt clar als nostres alumnes que sol haver múltiples estratègies o maneres de resoldre un problema.

De fet, una de les pràctiques més interessants quan resollem un problema col·lectivament consistix en el fet de no conformar-nos a obtenir la solució d'una determinada manera i insistir-los que pensen a resoldre'l amb estratègies diferents.

Esta pràctica dotarà els nostres alumnes d'un ric bagatge d'estratègies usades prèviament, que podran posar en pràctica davant d'un problema nou.

Una vegada l'alumne ha comprés la situació que se li planteja, ha de fer una anàlisi detallada de la informació que oferix l'enunciat i obtindre resposta a una sèrie d'interrogants, com ara: quines dades apareixen?, què ens demana?, totes les dades oferides són rellevants?, alguna dada és innecessària?, tenim totes les dades necessàries?, com serà la solució?, podem fer una estimació del resultat?

En esta fase, com en les que resten, és molt important saber combinar el treball individual de cada alumne amb el treball en grup. Esta fase d'elaboració del pla es presta especialment a l'intercanvi d'idees, al debat i, en definitiva, al treball cooperatiu.

Podria semblar que recórrer a les experiències prèvies contradiu les nostres paraules quan preveníem contra el costum de repetir models de problemes que finalment eren apresos de memòria i convertits en mers exercicis. El que proposem no és que els alumnes aprenguen models de problemes i la seua resolució, sinó que aprenguen estratègies de resolució, que comproven que problemes diferents poden ser resolts amb una mateixa estratègia i que tot problema és susceptible de resoldre's amb estratègies diferents.

I quan parlem d'estratègies de resolució ens referim, per exemple, a:

- **Modelització.** Crear representacions plàstiques de l'enunciat i de les dades del problema, al principi per mitjà d'objectes manipulables i, successivament, avançar en el procés de simbolització, passant per dibuixos, gràfics i esquemes de relacions entre les dades. Estes estratègies de modelització estan especialment indicades en els primers cursos. També pot demanar-se als alumnes de cursos posteriors que resolguen el problema amb més d'una estratègia i que, en eixe cas, la primera seria la modelització.
- **Tècniques d'assaig i error.** Suposar el problema resolt amb quantitats triades en el rang (conjunt de valors) marcat per una prèvia estimació de la solució. Aplicant successivament les solucions estimades al problema, comprovarem quines quantitats s'acosten més a complir les seues condicions, fins que trobem una quantitat que les complisca exactament. Eixa serà la solució.
- **Operació aritmètica:** Si hem identificat en l'enunciat alguna operació aritmètica (suma, resta, multiplicació o divisió) aplicarem a les dades els algoritmes corresponents per a obtindre la solució.

Fase 3: executar el pla

Consistix a posar en pràctica l'estratègia prevista, però no de manera irreflexiva. Cal valorar en tot moment com es du a terme el procés i si cada pas s'adequa a l'objectiu marcat.

Al mateix temps, cal estar atents a tota nova informació que pugui descobrir-se o deduir-se dels passos realitzats. Si la nova informació apareix, cal veure com encaixa amb les dades prèvies i si hem de replantejar-nos o no l'estratègia.

Cal ser perseverant i aplicar l'estratègia triada fins a arribar a la solució. I si arribàrem a la conclusió que l'estratègia triada no és adequada, no cal desanimar-se ni abandonar; tan sols és qüestió de replantejar-nos-la.

Esta és una idea que hem d'aconseguir que arribe als alumnes: la bona notícia és que quasi tots els problemes matemàtics que se'ls presenten tenen solució; només cal trobar-la.

Fase 4: comprovar el resultat

Els alumnes han d'habituar-se a no donar per bo qualsevol resultat obtingut, sinó que cal comprovar sempre si constituïx la solució buscada del problema.

Considerem convenient que esta comprovació incloga dos passos successius: l'estimació de la validesa del resultat i la comprovació de la seua exactitud.

Estimació de la validesa del resultat

Estimar la validesa del resultat consistix a comprovar si este pertany al rang de valors *possibles*.

També és molt important que l'alumne s'acostume a deixar constància escrita dels passos realitzats, les deduccions i les operacions. Esta precaució facilita l'explicació posterior de com s'ha resolt el problema i servix de fil conductor per a repassar allò que s'ha fet per a buscar un possible error.

Quan en la primera fase parlàvem de l'anàlisi de l'enunciat ens interrogàvem sobre com fer una estimació del resultat. El que ens plantejàvem era que hem d'acostumar l'alumne a reflexionar i que, a partir de les dades de l'enunciat, establisca un rang de resultats *possibles*.

Una vegada fet, si el resultat obtingut no està inclòs en el rang de l'estimació prèvia, hem de sospitar que hi ha alguna cosa que no està ben feta: o hem comés un error en l'aplicació de l'estratègia o en els càlculs realitzats (i hem d'acostumar els alumnes que repassen el que fan) o tal vegada l'error està en l'estimació del resultat.

Exactitud del resultat obtingut

De totes maneres, mai estarem totalment segurs d'haver trobat la solució si no fem un pas més i comprovem l'exactitud del resultat.

El primer pas consisteix a repetir els càlculs amb un procediment diferent. En alguns casos és útil substituir la dada ignorada pel resultat obtingut i comprovar si les relacions entre les dades es mantenen i les condicions del problema es complixen.

I, finalment, una vegada trobada la solució, estimulem els alumnes perquè busquen una altra manera de resoldre el problema, perquè apliquen una estratègia diferent.

Desenrotllament de les fases per mitjà d'un exemple pràctic

Explicarem a continuació una proposta didacticometodològica concreta per a treballar amb l'alumnat les quatre fases de resolució exposades amb anterioritat i explicitem cada una de les seqüències que durem a terme, amb la intencionalitat expressa d'aconseguir resoldre un problema aritmètic típic amb èxit.

Problema: *els alumnes de 3r curs de Primària del nostre col·legi se n'han anat d'excursió en un autobús de dos pisos. Si en el primer pis anaven 29 alumnes, i en el segon pis, 14 més que en el primer, quants alumnes de 3r de Primària van anar d'excursió?*

Fase 1: comprendre el problema

a) Comprendre l'enunciat

Un grup d'alumnes van d'excursió en un autobús i volem saber quants alumnes són.

b) Analitzar l'enunciat

Què ens demana?: "Cal saber quants alumnes van en l'autobús".

Hi ha alguna dada innecessària? "No importa de quin curs són els alumnes; per tant, és innecessari saber que són alumnes de 3r de Primària".

Què fa falta per a saber quants xiquets van en una autobús de 2 pisos? "Saber quants alumnes hi ha en cada pis de l'autobús".

Sabem quants alumnes van en el primer pis? "Sí, en el primer pis van 29 alumnes".

Sabem quants alumnes hi ha en el segon pis? "No sabem exactament quants en són"

I necessitem la dada de quants alumnes van en el segon pis? "Sí".

Per tant, la pregunta del problema era: "Saber quants alumnes van en l'autobús".

Però ens falta una dada: "Saber quants alumnes van en el segon pis".

I per a aconseguir resoldre el problema, què caldrà esbrinar primer? "La dada que falta".

c) Fer estimacions sobre possibles resultats

Quines dades apareixen en l'enunciat?

- Són alumnes de 3r de Primària
- L'autobús té 2 pisos
- En el primer pis van 29 alumnes
- En el segon pis van 14 alumnes més que en el primer

És possible que en el segon pis vagen 25 alumnes? "No, perquè les dades diuen que n'hi ha més que en el primer pis, i si en el primer n'hi ha 29, en el segon ha d'haver-ne 30 o més".

És possible que en el segon pis vagen 75 alumnes? En primer lloc, arrodonim les quantitats a la desena superior, per a passar a continuació a raonar de la manera següent: "En el primer pis hi ha 29, és a dir uns 30 alumnes; en el segon, 14, és a dir, uns 20 alumnes més que en el primer pis, o, el que és el mateix, uns 20 alumnes més que els 30 del primer pis. Per tant, com que 20 alumnes més de 30 són 50, en el segon pis n'hi ha d'haver, com a màxim, 50".

En definitiva, quants alumnes esperem en el segon pis? "Entre 30 i 50 alumnes".

Ara bé, si en el segon pis suposem que hi haurà entre 30 i 50 alumnes, quants podem esperar que en vagen en tot l'autobús? "Si continuem amb l'arrodoniment a la desena superior, en el primer pis hi ha uns 30 alumnes; en el segon, entre 30 i 50 alumnes; i en l'autobús hi haurà entre 60 alumnes (30 del primer pis més 30 del segon pis) i 80 alumnes (30 del primer pis i 50 del segon pis)".

En definitiva, quins resultats del problema podrien ser vàlids? "Qualsevol entre 60 i 80 alumnes".

Fase 2: elaborar un pla de resolució

En analitzar el problema hem trobat que hem de donar resposta a la pregunta: "Quants alumnes viatgen en l'autobús?" No obstant això, per a donar la resposta adequada, disposem ja d'una dada coneguda que ens proporciona l'enunciat del problema quan ens diu que en el primer pis van 29 alumnes.

Però necessitem una altra dada: "saber quants alumnes hi ha exactament en el segon pis".

Ara bé, arribats a este punt en la fase d'elaboració del pla de resolució i abans de continuar amb la busca de la resposta, que no la solució adequada, després d'haver analitzat cada un dels interrogants plantejats, tal vegada és convenient fer un xicotet gràfic (amb un dibuix de l'autobús de 2 pisos) per a facilitar la representació i l'expressió de les dades conegudes fins al moment.

Continuem avant amb nous interrogants, com podem saber quants alumnes hi ha en el segon pis? "Si hi ha 14 alumnes més que en el primer pis, bastaria afegir-los als 29 del primer pis. I amb això, resposta donada."

Fase 3: executar el pla

- a) Per a calcular els alumnes del segon pis, cal afegir 14 alumnes als 29 del primer. Podem fer-ho si sumem 14 als 29:

$$29 \text{ alumnes} + 14 \text{ alumnes} = 43 \text{ alumnes, hi ha en el 2n pis}$$

- b) Per a calcular els alumnes que viatgen en l'autobús, cal sumar els que van en el primer pis (dada facilitada en l'enunciat) a aquells situats en el segon pis (en el primer pis viatgen 29 alumnes i en el segon, 43 alumnes).

$$\text{En total: } 29 \text{ alumnes} + 43 \text{ alumnes} = 72 \text{ alumnes, hi ha en l'autobús}$$

Fase 4: comprovar el resultat

- a) Revisar les estimacions prèvies

El primer resultat, el dels alumnes del segon pis, havia d'estar entre 30 i 50. El resultat obtingut, 43 alumnes, és un resultat possible.



Segon pis: 14 alumnes més que en el primer pis.

Afegir 14 alumnes als 29 del primer pis.

Primer pis: 29 alumnes.

Per tant el nostre pla consistix a:

- Calcular primer quants alumnes viatgen en el segon pis i, per a aconseguir-ho, afegirem 14 alumnes als 29 del primer pis.

- Després intentarem respondre la pregunta del problema, és a dir, el total d'alumnes que viatgen en l'autobús, i per a fer-ho sumarem els alumnes del primer pis i els del segon.

La resolució de problemes en el primer cicle de Primària

Per això, tan sols quan verifiquem l'exactitud dels càlculs realitzats i comprovem que les dades obtingudes són coherents amb la situació descrita en l'enunciat, estarem raonablement segurs que hem resolt correctament el problema.

El resultat final, el nombre d'alumnes que viatgen en l'autobús, havia d'estar entre 60 i 80. El resultat obtingut, 72 alumnes, és un resultat possible.

b) Comprovar l'exactitud dels resultats.

Com que hem utilitzat algorismes de suma per a fer els càlculs, hauríem de repetir-los amb un procediment diferent, per exemple, amb una calculadora o un àbac.

4. Conclusions

En tota l'etapa educativa obligatòria, i encara més durant el primer cicle de l'Educació Primària, el professorat ha d'acompanyar de manera sistemàtica tots els alumnes cap a l'èxit d'una estructuració de la ment que facilite, d'una manera constant, l'anàlisi de situacions problemàtiques, la planificació, la resolució i l'estudi de la viabilitat de totes les solucions obtingudes.

Hem de ser conscients, com a docents, que la resolució de problemes afavorix una sèrie de capacitats que de cap manera són exclusives del món matemàtic i que, al mateix temps, la comprensió i la consolidació de les destreses adequades per a garantir l'èxit d'esta finalitat, són uns processos lents i progressius.

Són elements clau d'un aprenentatge de les matemàtiques amb garanties d'equitat i qualitat: la bona actitud del professorat, que treballa la resolució de problemes de manera planificada i ben estructurada, junt amb el coneixement i l'experimentació dels diferents problemes desplegats a través de les distintes propostes exposades en les pàgines precedents, unida a un clima de classe afavoridor de la investigació i la cooperació.

5. Bibliografia

AEBLI, H. (1985): *Doce formas básicas de enseñar. Una didáctica basada en la psicología*, Narcea, Madrid.

ALSINA, A. (2004): *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos*, Narcea, Madrid.

BARUK, S. (1985): *L'âge du capitaine*, Seuil, París.

BAROODY, A. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*, Visor, Madrid.

BINIÉS, P. (2008): *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals: o cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante*, Graó, Barcelona.

BLANCO, L. (1993): *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*, Editorial Universitas, Badajoz.

BRANSFORD, J.D. i STEIN, B.S. (1986): *Solución ideal de problemas*, Labor, Barcelona.

CALLEJO, M^a L. (1990): *La resolución de problemas en un club matemático*. Narcea, Madrid.

CASTRO, E. (2001): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*, Síntesis, Madrid.

CERDAN, F. i PUIG, L. (1988): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.

- CHAMORRO, M.C. i BELMONTE, J.M. (1989): *El problema de la medida*, Síntesis, Madrid.
- COCKROFT, V.H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan*, MEC, Madrid.
- D'AMORE, B. (1997): *Problemas. Pedagogía y psicología de las matemáticas en la actividad de resolución de problemas*, Síntesis, Madrid.
- Decret 111/2007, de 20 de juliol, de Consell, per qual s'establix el currículum d'Educació Primària a la Comunitat Valenciana (DOCV núm. 5562, de 24 de julio de 2007).
- DIENES, Z. i GOLDING, E.W. (1987): *Los primeros pasos en matemáticas*, Teide, Barcelona.
- ENZENSBERGER, H.M. (1997): *El diablo de los números*, Siruela, Madrid.
- FERNÁNDEZ, J. i RODRÍGUEZ, I. (1989): *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*, Síntesis, Madrid.
- FISHER R. i VINCE, A. (1990): *Investigando las matemáticas*, Akal, Madrid.
- GARCÍA JIMÉNEZ, J.E. (2005): "Resolución de problemas", *Aula de innovación educativa*, Núm. 142, 81-96.
- GUZMÁN, M. (1984): *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona.
- GUZMÁN, M. (1984): *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona.
- GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Ediciones Pirámide, Madrid.
- HIEBERT, J. et al. (1997): *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding*. L. Peake (editor) Heinemann. Portsmouth, NH.
- LLINARES, S. (2003): "Matemáticas escolares y competencia matemática". CHAMORRO (Coord.) *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*, Madrid: Pearson-Prentice Hall.

- MASON, J., BURTON, L. i STACEY, K. (1988): *Pensar matemàticament*, MEC-Labor, Barcelona.
- NTCM, (1993): *Estàndares curriculares y de evaluaci3n para la educaci3n matemàtica*, SAEM Thales, Sevilla.
- P3LYA, G. (1987): *C3mo resolver y plantear problemas*, Trillas, Mèxic.
- PUIG, L i CERDÁN, F. (1988): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.
- RESNICK, L.B. i FORD, W.W. (1987): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paid3s, Barcelona.
- Tuning Educational Structures in Europe. (1999): Programa S3crates. Tempus de la Direcci3 General d'Educaci3 i Cultura de la Uni3 Europea.
- VERGNAUD, G. (1993): *El niño, la matemàtica y la realidad*, Trillas, Mèxic.
- VILA, A. i CALLEJO, M^a. L. (2004): *Matemáticas para aprender a pensar*, Narcea, Madrid.
- WERTHEIMER, M. (1991): *El pensamiento productivo*, Paid3s Ibérica, Barcelona.

6. Pàgines web

Àbac virtual:

<http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/ArithmeticAbacus.html>

Balances numèriques:

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=26

Blocs multibases:

<http://www.arcytech.org/java/b10blocks/b10blocks.html>

Calculadora trencada:

<http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Arithmetic/BrokenCalculator.html>

Configuracions puntuals:

<http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Algebra/GaussSummation.html>

Comptes i agrupament d'unitats:

<http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Arithmetic/CountingAndGrouping.html>

Quadrats màgics

<http://www.geocities.com/cuadradomagicos/>

Descomposicions numèriques:

http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=26